PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 101 (1963)

SUR UNE INÉGALITÉ

Petar M. Vasić

(Reçu le 8 janvier 1963)

1. Dans l'article **[1]** *D. S. Mitrinović* a considéré, par une voie purement algébrique, pour quelles valeurs de $t \in (0,1)$ ont lieu les inégalités suivantes

(1.1) $$\sqrt[n]{1-t^n} > \sqrt[n-1]{1-t^{n-1}} \quad (n \text{ nombre naturel}),$$

(1.2) $$\sqrt[n]{1-t^{n-1}} > \sqrt[n-1]{1-t^n} \quad (n \text{ nombre naturel}).$$

Dans le même article il a proposée la question suivante:

Examiner pour quelles valeurs de $t \in (0,1)$ aura lieu l'inégalité

(1.3) $$\sqrt[m]{1-t^p} > \sqrt[n]{1-t^q},$$

ou

(1.4) $$\sqrt[m]{1-t^p} < \sqrt[n]{1-t^q},$$

où m, n, p, q sont des nombres naturels.

Dans cette Note, nous allons examiner deux cas entrant dans cette catégorie d'inégalités, cas qui se laissent étudier par une voie purement algébrique indiqué dans l'article **[1]**.

2. Considérons l'inégalité suivante

(2.1) $$\sqrt[n]{1-t^p} > \sqrt[n-1]{1-t^q},$$

où $n(> 3), p, q$ sont des nombres naturels tels que

(2.2) $$p<q \leqslant \frac{n-1}{n-3}p.$$

Nous allons examiner pour quelles valeurs de $t \in (0,1)$ a lieu l'inégalité (2.1). Cette inégalité implique l'inégalité équivalente

$$(1-t^p)^{n-1} > (1-t^q)^n.$$

Considérons le polynôme suivant

(2.3) $$P(t) = P_1(t) - P_2(t),$$

avec

$$P_1(t)=(1-t^p)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}t^{pk},$$

$$P_2(t)=(1-t^q)^n=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}t^{q\nu}.$$

Le polynôme $P(t)$ s'écrit sous la forme que voici

$$\begin{aligned}P(t)=&-\binom{n-1}{1}t^p && +\binom{n}{1}t^q\\ &+\binom{n-1}{2}t^{2p} && -\binom{n}{2}t^{2q}\\ &-\cdots\\ &+(-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}t^{(n-2)p} && -(-1)^{n-2}\binom{n}{n-2}t^{(n-2)q}\\ &+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}t^{(n-1)p} && -(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}t^{(n-1)q}\\ & && -(-1)^{n}\binom{n}{n}t^{nq}.\end{aligned}$$

Ordonnons les termes de $P(t)$ suivant les puissances croissantes de t. Les deux termes consécutifs de $1-P_2(t)$ ne peuvent pas être interposés entre deux termes de $P_1(t)-1$, car $p<q$. Étant donné que les coefficients de $P_1(t)-1$ sont alternatifs, on peut d'après les remarques précédentes conclure que le nombre des variations de signes du polynôme $P(t)$ est supérieur à celui-ci de $P_1(t)-1$ pour deux unités.

Ainsi le polynôme $P(t)$ a au total les n variations de signe et peut avoir, d'après le théorème de *Descartes*, tout au plus n zéros positifs.

D'après (2.3), il s'ensuit que $t=1$ est un zéro de l'ordre $n-1$ du polynôme $P(t)$.

Étant donné que

$$\operatorname{sgn} P(\varepsilon)=-1, \qquad \operatorname{sgn} P(1-\varepsilon)=+1,$$

où $\varepsilon\,(>0)$ est suffisamment petit, le polynôme $P(t)$ n'a qu'un zéro positif $t_0\in(0,1)$.

Par suite, si $p<q\leqslant\dfrac{n-1}{n-3}p$, on a

$$\sqrt[n]{1-t^p}<\sqrt[n-1]{1-t^q} \qquad (0<t<t_0<1),$$

$$\sqrt[n]{1-t^p}>\sqrt[n-1]{1-t^q} \qquad (0<t_0<t<1).$$

Dans le cas où $n=2$ ou $n=3$, on conclut de la même manière que

$$\sqrt[n]{1-t^p}<\sqrt[n-1]{1-t^q} \qquad (0<t<t_0<1),$$

$$\sqrt[n]{1-t^p}>\sqrt[n-1]{1-t^q} \qquad (0<t_0<t<1),$$

où $p, q\ (p<q)$ sont des nombres naturels quelconques.

3. Nous allons examiner pour quelles valeurs de $t\in(0,1)$ a lieu l'inégalité que voici

$$\sqrt[n]{1-t^p}>\sqrt[n-2]{1-t^q} \tag{3.1}$$

où $n(>4)$, p,q sont des nombres naturels tels que

$$p<q\leqslant\frac{n-2}{n-4}p. \tag{3.2}$$

On peut mettre l'inégalité (3.1) sous la forme suivante

$$(1-t^p)^{n-2}>(1-t^q)^n.$$

Considérons maintenant le polynôme

$$Q(t)=(1-t^p)^{n-2}-(1-t^q)^n. \tag{3.3}$$

On en tire

$$\begin{aligned} Q(t)=t^p\Big\{-\tbinom{n-2}{1} \quad & +\tbinom{n}{1}t^{q-p}\\ +\tbinom{n-2}{2}t^p \quad & -\tbinom{n}{2}t^{2q-p}\\ -\dots \quad & \\ +(-1)^{n-3}\tbinom{n-2}{n-3}t^{(n-4)p} & -(-1)^{n-3}\tbinom{n}{n-3}t^{(n-3)q-p}\\ +(-1)^{n-2}\tbinom{n-2}{n-2}t^{(n-3)p} & -(-1)^{n-2}\tbinom{n}{n-2}t^{(n-2)q-p}\\ & -(-1)^{n-1}\tbinom{n}{n-1}t^{(n-1)q-p}\\ & -(-1)^{n}\tbinom{n}{n}t^{nq-p}\Big\}. \end{aligned}$$

D'après (3.2) le polynôme $Q(t)$ a les n variations de signe. Mettant à profit le théorème de *Descartes*, on conclut que le nombre des zéros positifs est inférieur ou égal à n.

Selon (3.3) $t=1$ est un zéro de l'ordre $n-2$ du polynôme $Q(t)$.

Étant donné que

$$\operatorname{sgn} Q(\varepsilon)=-1, \qquad \operatorname{sgn} Q(1-\varepsilon)=+1, \qquad \operatorname{sgn} Q(1+\varepsilon)=(-1)^{n-2},$$

où $\varepsilon(>0)$ est suffisamment petit, et

$$\lim_{t\to+\infty} Q(t)=(-1)^{n-1}\cdot\infty,$$

le polynôme $Q(t)$ a encore seulement deux zéros positifs $t_0\in(0,1)$ et $t_1\in(1,+\infty)$.

Si $p<q\leqslant\frac{n-2}{n-4}p$, il résulte de ce qui précède que l'on a

$$\sqrt[n]{1-t^p}<\sqrt[n-2]{1-t^q} \qquad (0<t<t_0<1),$$

$$\sqrt[n]{1-t^p}>\sqrt[n-2]{1-t^q} \qquad (0<t_0<t<1).$$

Si $n=3$ ou $n=4$, on conclut de la même façon qu'on a

$$\sqrt[n]{1-t^p}<\sqrt[n-2]{1-t^q} \quad (0<t<t_0<1),$$

$$\sqrt[n]{1-t^p}>\sqrt[n-2]{1-t^q} \quad (0<t_0<t<1),$$

où $p, q\ (p<q)$ sont des nombres naturels quelconques.

Remarque 1. Si $p \geqslant q$, on peut démontrer sans difficulté que les inégalités (2.1) et (3.1) sont vraies pour chaque $t \in (0,1)$.

Remarque 2. Voir aussi l'article [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinović: *Sur une inégalité algébrique*, ces Publications, № 85 (1963).

[2] D. S. Mitrinović et D. Ž. Djoković: Certaines inégalités où intervient la fonction puissance, ces Publications, № 100 (1963).