PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 100 (1963)

CERTAINES INÉGALITÉS OÙ INTERVIENT LA FONCTION PUISSANCE

D. S. Mitrinović et *D. Ž. Djoković*

(Reçu le 5 décembre 1962)

1. Dans l'article **[1]** la question suivante est proposée:

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la fonction

$$\sqrt[m]{1-x^p} \qquad (m, p>0;\ 0\leqslant x\leqslant 1) \tag{1.1}$$

est supérieure (ou inférieure) à

$$\sqrt[n]{1-x^q} \qquad (n, q>0;\ 0\leqslant x\leqslant 1). \tag{1.2}$$

Dans le même article quelques cas seulement sont traités où les m, n, p, q sont des nombres naturels. Du reste, le problème général est assez difficile à résoudre. Dans le présent article, nous allons examiner les deux cas suivants:

$$1^\circ \quad p=m, \quad q=n;$$

$$2^\circ \quad p=n, \quad q=m,$$

où m et n désignent des nombres réels positifs.

2. Nous allons établir le théorème suivant:

T h é o r è m e 1. — *Pour* $0<m<n$ *et* $0<x<1$, *on a*

$$\sqrt[n]{1-x^n}>\sqrt[m]{1-x^m}\,. \tag{2.1}$$

Démonstration. Il suffit de considérer la fonction

$$y=f(a)=(1-x^a)^{\frac{1}{a}} \qquad (a>0;\ 0<x<1)$$

et sa dérivée

$$f'(a)=-\frac{(1-x^a)\log y+x^a\log x}{ay^{a-1}}$$

laquelle est positive. Donc, la fonction $f(a)$ est strictement croîssante, ce qu'il fallait démontrer.

Par une voie analogue, on démontre l'inégalité suivante

$$\sqrt[m]{1+x^m}>\sqrt[n]{1+x^n} \qquad (0<m<n;\ x>0). \tag{2.2}$$

3. Dans le cas 2°, on obtient le résultat suivant:

Théorème 2. — *On a, pour* $0<m<n$, *les deux inégalités suivantes*:

$$\sqrt[m]{1-x^n}>\sqrt[n]{1-x^m} \qquad (0<x<x_0), \tag{3.1}$$

$$\sqrt[m]{1-x^n}<\sqrt[n]{1-x^m} \qquad (x_0<x<1), \tag{3.2}$$

où x_0 *désigne la racine unique de l'équation*

$$x^m+x^n=1, \tag{3.3}$$

qui appartient à l'intervalle $(0, 1)$.

Démonstration. Considérons les deux fonctions

$$y=\sqrt[m]{1-x^n} \qquad (0\leqslant x\leqslant 1), \tag{3.4}$$

$$y=\sqrt[n]{1-x^m} \qquad (0\leqslant x\leqslant 1). \tag{3.5}$$

Les courbes C_1 et C_2, dont les équations sont (3.4) et (3.5) respectivement, lient les points $A\,(0,1)$ et $B\,(1,0)$. Les fonctions (3.4) et (3.5) étant mutuellement inverses, les courbes C_1 et C_2 sont symétriques par rapport à la droite $y=x$. Donc, les courbes C_1 et C_2 ont un point d'intersection $P\,(x_0, x_0)$ sur la droite $y=x$. On voit aisément que x_0 est la racine de l'équation (3.3).

Nous allons prouver que les courbes C_1 et C_2 n'ont que A, B, P comme points communs. Supposons qu'il existe un point d'intersection $Q\,(a, b)$ des courbes C_1 et C_2, différent des points A, B, P. La symétrie de ces courbes permet à supposer que $a>b>0$. Les nombres a et b satisfont aux égalités suivantes

$$\begin{aligned} a^m+b^n&=1,\\ b^m+a^n&=1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Si l'on y pose $\lambda=b/a$ $(0<\lambda<1)$, le système (3.6) peut s'écrire sous la forme

$$a^m+\lambda^n a^n=1,$$

$$\lambda^m a^m+a^n=1.$$

Il s'ensuit

$$a^m=\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda^{m+n}}, \qquad a^n=\frac{1-\lambda^m}{1-\lambda^{m+n}}.$$

Donc, λ satisfait à l'équation

$$\left(\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda^{m+n}}\right)^n=\left(\frac{1-\lambda^m}{1-\lambda^{m+n}}\right)^m,$$

ce qui est impossible d'après le théorème A_1, démontré en appendice du présent article.

Envisageons les deux arcs des courbes C_1 et C_2 entre les points P et B. Pour établir quel arc est plus proche de l'origine, nous allons calculer les dérivées des fonctions (3.4) et (3.5) pour $x=x_0$. Étant donné que ces deux fonctions sont mutuellement inverses, il suffit de calculer

$$\frac{d}{dx}\sqrt[m]{1-x^n}\,\Bigg|_{x=x_0} = -k\,.$$

L'équation (3.4) peut s'écrire:

$$y^m + x^n = 1$$

d'où l'on obtient

$$k = \frac{n}{m}\,x_0^{n-m}\,. \tag{3.7}$$

Par élimination de x_0, les équations (3.3) et (3.7) donnent

$$\left(\frac{mk}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}} + \left(\frac{mk}{n}\right)^{\frac{n}{n-m}} = 1\,. \tag{3.8}$$

D'après l'inégalité (4.8), indiquée dans l'appendice, en posant $p=m/n$, on obtient

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}} + \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{n-m}} < 1 \qquad (0<m<n). \tag{3.9}$$

Le premier membre de (3.8), considéré comme fonction de k, croît avec k. En mettant à profit ce fait et l'inégalité (3.9), on conclut que dans (3.8) on a $k>1$.

Étant donc donné que $k>1$, il existe un $\varepsilon\,(>0)$ tel que pour

$$x \in (x_0, x_0+\varepsilon)$$

la courbe C_1 est au-dessous de C_2. Mais C_1 et C_2 n'ont aucun point commun dans l'intervalle $(x_0, 1)$. C'est pourquoi, la courbe C_1 dans tout cet intervalle est au-dessous de C_2.

Donc, l'inégalité (3.2) est démontrée. L'inégalité (3.1) est une conséquence de (3.2) et de la symétrie des courbes C_1 et C_2.

Le théorème 2 est ainsi complètement établi.

4. Appendice

Théorème A_1. — *L'inégalité*

$$\left(\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda^{m+n}}\right)^n > \left(\frac{1-\lambda^m}{1-\lambda^{m+n}}\right)^m \tag{4.1}$$

est vraie pour $0<\lambda<1$ *et* $0<m<n$.

Démonstration. Cette inégalité est équivalente à celle

$$n\log(1-\lambda^n) - m\log(1-\lambda^m) - (n-m)\log(1-\lambda^{m+n}) > 0.$$

En développant les fonctions logarithmiques ci-haut en séries, il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(n-m)\,\lambda^{(m+n)\nu}+m\lambda^{m\nu}-n\lambda^{n\nu}}{\nu}>0.$$

La dernière inégalité peut s'écrire sous la forme que voici

(4.2) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} A_\nu > 0,$$

avec

$$A_\nu = (n-m)\,\lambda^{(m+n)\nu}+m\lambda^{m\nu}-n\lambda^{n\nu}.$$

Pour établir l'inégalité (4.2), il suffit de prouver que la fonction

$$f(x) \equiv (n-m)\,x^{m+n}+m x^m-n x^n \qquad (0<m<n)$$

est positive pour $0<x<1$, car on a

$$A_\nu = f(\lambda^\nu).$$

L'assertion que la fonction $f(x)$ croît dans l'intervalle (0, 1) se ramène à la vérification de l'inégalité suivante

$$x f'(x) \equiv (n^2-m^2)\,x^{m+n}+m^2 x^m-n^2 x^n>0 \qquad (0<x<1),$$

ou bien

(4.3) $$g(x) \equiv (n^2-m^2)\,x^n+m^2-n^2 x^{n-m}>0 \qquad (0<x<1).$$

Par différentiation, on trouve

$$g'(x) \equiv n\,(n-m)\,x^{n-m-1}\{(n+m)\,x^m-n\}.$$

Étant donné que

$$g(0)=m^2, \qquad g(1)=0,$$

on conclut que la fonction $g(x)$ croît par valeurs positives à partir de m^2 pour $x=0$, atteint son maximum pour

$$x=\left(\frac{n}{m+n}\right)^{1/m},$$

et décroît ensuite jusqu'à zéro pour $x=1$.

Par suite, l'inégalité (4.3) est vraie et le théorème A_1 est ainsi démontré.

Théorème A_2. — *L'inégalité*

(4.4) $$\frac{2}{e}<f(p) \equiv (1+p)\,p^{\frac{p}{1-p}}<1$$

est vraie dans le cas où $0<p<1$.

Démonstration. On a, l'une après l'autre, les égalités suivantes:

$$\log f(p)=\log\,(1+p)+\frac{p}{1-p}\log p,$$

$$\frac{f'(p)}{f(p)}=\frac{1}{(1-p)^2}\left\{\log p+2\frac{1-p}{1+p}\right\}=\frac{g(p)}{(1-p)^2},$$

$$g'(p)=\frac{1}{p}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^2.$$

Il s'ensuit

$$g(p)<g(1)=0\,, \tag{4.5}$$

$$\lim_{p\to 1}f(p)<f(p)<\lim_{p\to 0}f(p)\,. \tag{4.6}$$

D'autre part, on trouve

$$\lim_{p\to 1}f(p)=\frac{2}{e}\,,\qquad \lim_{p\to 0}f(p)=1\,. \tag{4.7}$$

En confrontant les relations (4.6) et (4.7), on conclut que l'inégalité (4.4) est vraie.

Il faut observer que l'inégalité (4.4) peut s'écrire également sous la forme suivante

$$\frac{2}{e}<p^{\frac{p}{1-p}}+p^{\frac{1}{1-p}}<1\qquad (0<p<1), \tag{4.8}$$

qui est déjà employée dans des démonstrations précédentes.

5. Exemples

Les courbes (3.4) et (3.5), pour différentes valeurs de m et n, sont représentées sur les figures 1, 2, 3. Les valeurs correspondantes du zero x_0 sont les suivantes:

$$\begin{array}{lll}
m=1\;, & n=2\;, & x_0=0{,}618\,033\ldots, \\
m=2\;, & n=3\;, & x_0=0{,}754\,877\ldots, \\
m=3\;, & n=4\;, & x_0=0{,}819\,172\ldots, \\
m=1\;, & n=3\;, & x_0=0{,}682\,327\ldots, \\
m=2\;, & n=4\;, & x_0=0{,}786\,151\ldots, \\
m=3\;, & n=5\;, & x_0=0{,}837\,619\ldots, \\
m=1\;, & n=4\;, & x_0=0{,}724\,491\ldots, \\
m=2\;, & n=5\;, & x_0=0{,}808\,730\ldots, \\
m=3\;, & n=6\;, & x_0=0{,}851\,799\ldots, \\
m=1/2, & n=1\;, & x_0=0{,}381\,966\ldots, \\
m=1/3, & n=1/2, & x_0=0{,}185\,037\ldots, \\
m=1/4, & n=1/3, & x_0=0{,}091\,307\ldots, \\
m=1/3, & n=1\;, & x_0=0{,}317\,672\ldots, \\
m=1/4, & n=1/2, & x_0=0{,}145\,89\cancel{9}\ldots, \qquad 18 \\
m=1/5, & n=1/3, & x_0=0{,}070\,097\ldots, \\
m=1/4, & n=1\;, & x_0=0{,}275\,508\ldots, \\
m=1/5, & n=1/2, & x_0=0{,}119\,684\ldots, \\
m=1/6, & n=1/3, & x_0=0{,}055\,728\ldots.
\end{array}$$

Tous les chiffres écrits sont exacts.

Deux cas spéciaux des courbes (1.1) et (1.2), à savoir pour $m=6$, $p=2$, $n=3$, $q=5$ et $m=5$, $p=2$, $n=3$, $q=4$, sont construits sur les figures 4 et 5. Les abscisses des points d'intersections de ces courbes sont:

$$0,868\,836\ldots,\quad 1,071\,400\ldots \qquad \text{(fig. 4)}$$

27 $$0,877\,\cancel{836}\ldots, \qquad \text{(fig. 5)}.$$

Ici de même tous les chiffres écrits sont exacts.

Toutes les figures et les résultats numériques indiqués ici sont faits par étudiant zélé *D. Slavić.*

RÉFÉRENCE

[1] D. S. Mitrinović: *Sur une inégalité algébrique*, ces Publications № 85 (1963).

Note ajoutée sur l'épreuve

L'inégalité $f(x)>0$ $(0<x<1)$, utilisée dans la démonstration du théorème A_1, peut être établie directement comme suit.

Étant donné que la fonction

$$g(t)=\frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{x^t}\right) \qquad (0<x<1)$$

est strictement décroissante pcur $t>0$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= nx^n(x^m-1)-mx^m(x^n-1)\\ &= mnx^{m+n}[g(m)-g(n)]>0. \end{aligned}$$

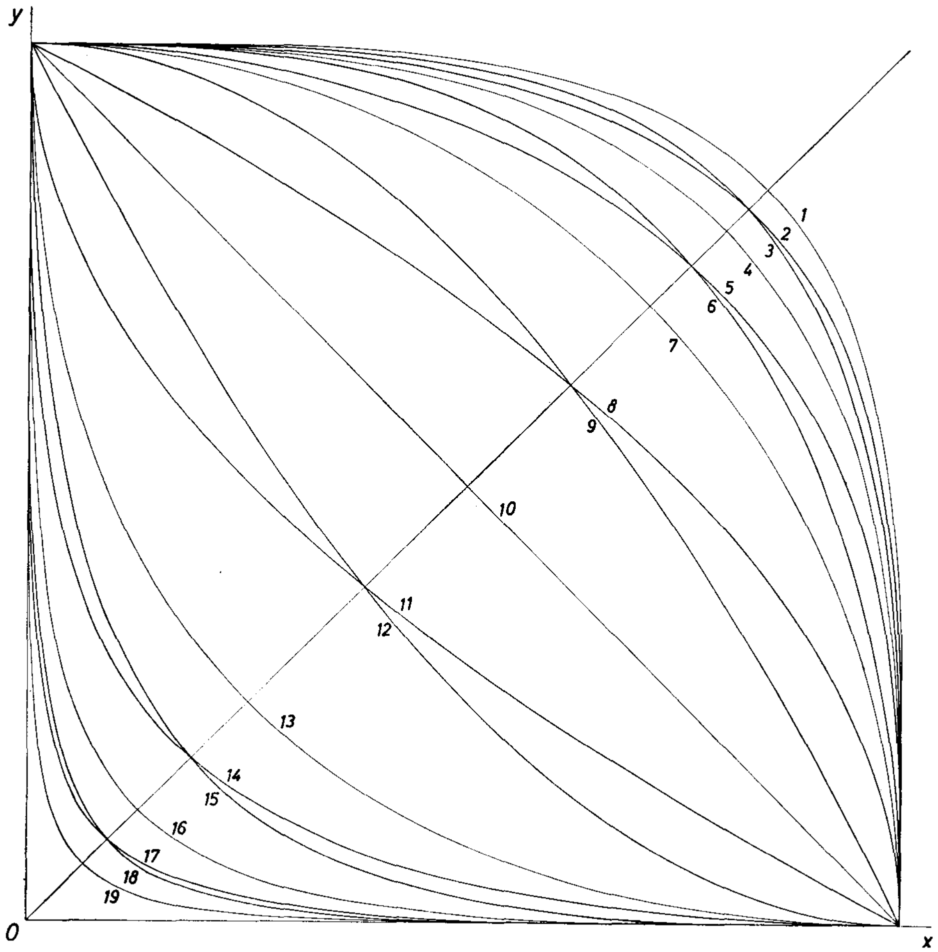

Fig. 1

Les équations des courbes construites plus haut sont respectivement:

1. $y=\sqrt[4]{1-x^4}$, 2. $y=\sqrt[4]{1-x^3}$, 3. $y=\sqrt[3]{1-x^4}$, 4. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$,

5. $y=\sqrt[3]{1-x^2}$, 6. $y=\sqrt{1-x^3}$, 7. $y=\sqrt{1-x^2}$, 8. $y=\sqrt{1-x}$,

9. $y=1-x^2$, 10. $y=1-x$, 11. $y=1-\sqrt{x}$, 12. $y=(1-x)^2$,

13. $y=(1-\sqrt{x})^2$, 14. $y=(1-\sqrt[3]{x})^2$, 15. $y=(1-\sqrt{x})^3$, 16. $y=(1-\sqrt[3]{x})^3$,

17. $y=(1-\sqrt[4]{x})^3$, 18. $y=(1-\sqrt[3]{x})^4$, 19. $y=(1-\sqrt[4]{x})^4$.

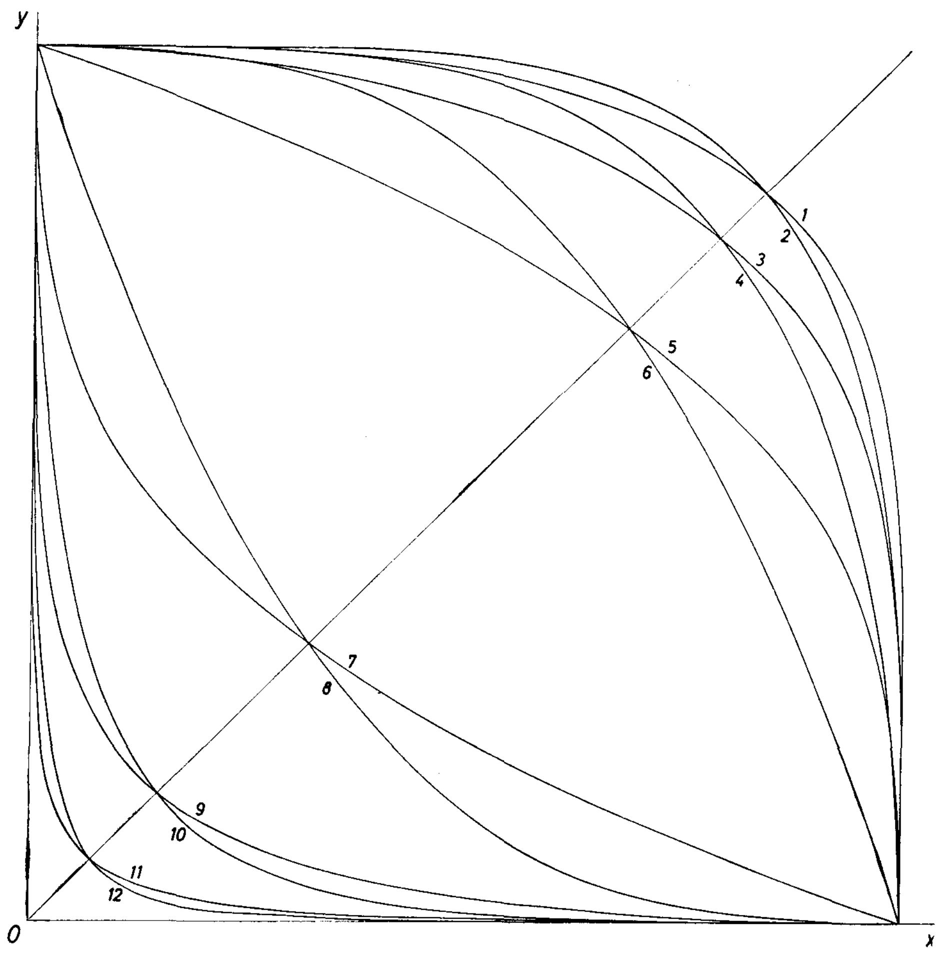

Fig. 2

Les équations des courbes construites plus haut sont respectivement:

1. $y=\sqrt[5]{1-x^3}$, 2. $y=\sqrt[3]{1-x^5}$, 3. $y=\sqrt[4]{1-x^2}$, 4. $y=\sqrt{1-x^4}$,

5. $y=\sqrt[3]{1-x}$, 6. $y=1-x^3$, 7. $y=1-\sqrt[3]{x}$, 8. $y=(1-x)^3$,

9. $y=(1-\sqrt[4]{x})^2$, 10. $y=(1-\sqrt{x})^4$, 11. $y=(1-\sqrt[5]{x})^3$, 12. $y=(1-\sqrt[3]{x})^5$.

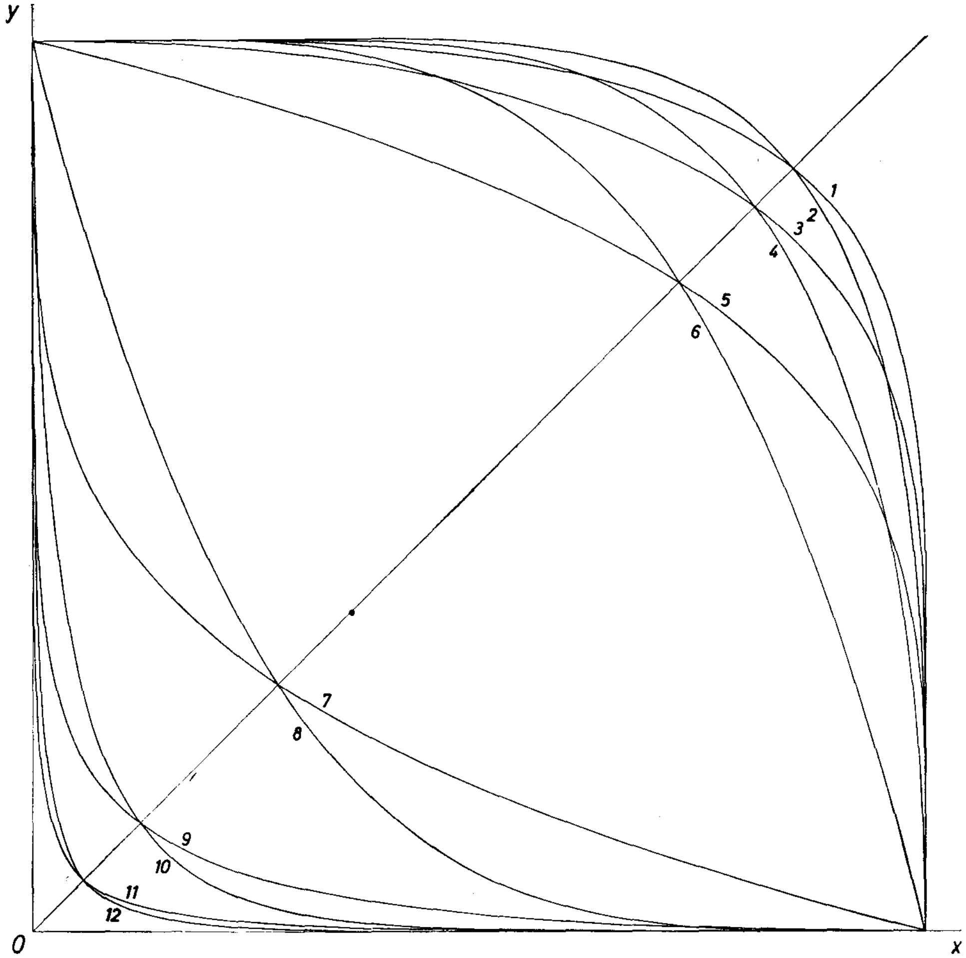

Fig. 3

Les équations des courbes construites plus haut sont respectivement:

1. $y=\sqrt[6]{1-x^3}$, 2. $y=\sqrt[3]{1-x^6}$, 3. $y=\sqrt[5]{1-x^2}$, 4. $y=\sqrt{1-x^5}$,

5. $y=\sqrt[4]{1-x}$, 6. $y=1-x^4$, 7. $y=1-\sqrt[4]{x}$, 8. $y=(1-x)^4$,

9. $y=(1-\sqrt[5]{x})^2$, 10. $y=(1-\sqrt{x})^5$, 11. $y=(1-\sqrt[6]{x})^3$, 12. $y=(1-\sqrt[3]{x})^6$.

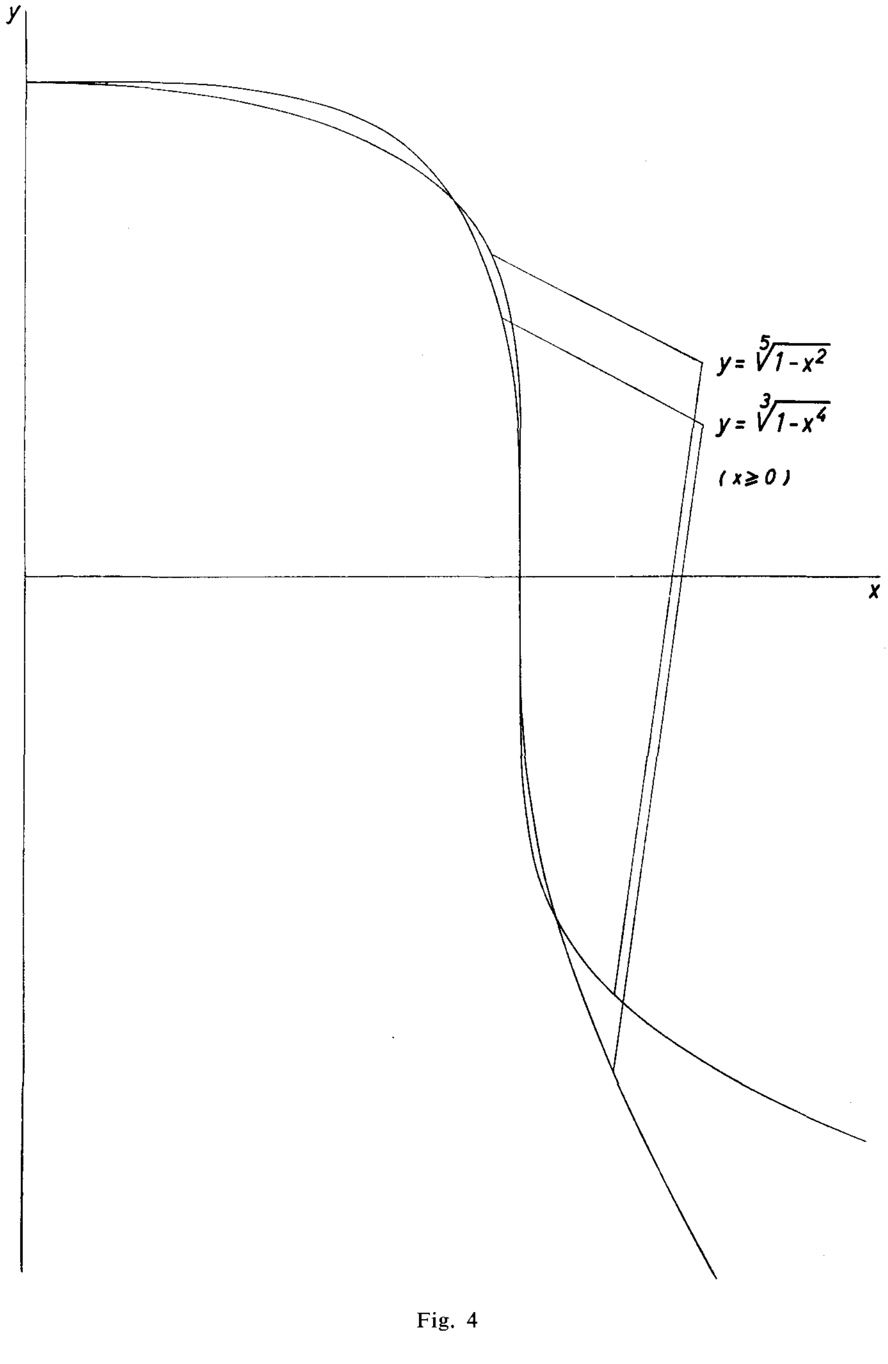

Fig. 4

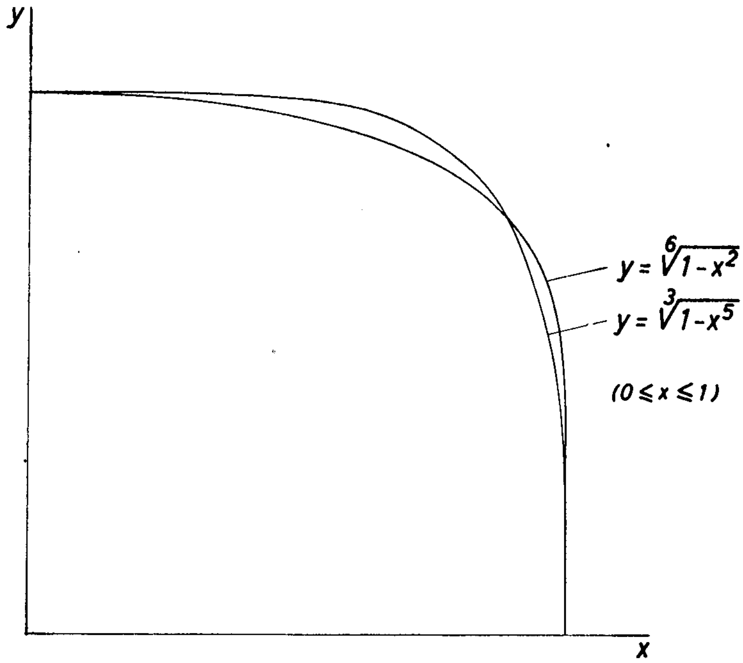

Fig. 5