PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 94 (1963)

ABSCISSE D'ULTRACONVERGENCE D'UNE CLASSE DE SÉRIES DE DIRICHLET

Lazar Karadžić

(Reçu le 11 décembre 1962)

Soit

$$S_n(s)=\sum_1^n a_k e^{-\lambda_k s} \tag{1}$$

une suite de sommes partielles de la série de Dirichlet

$$\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s} \tag{2}$$

$$(0<\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n\to\infty\ ;\ n\to\infty;\ s=x+yi).$$

Le domaine D où cette série converge absolument est obtenu selon le procédé exposé dans le travail [1]. Ainsi, par exemple, lorsqu'on écrit la série

$$\sum_1^\infty |a_n| e^{-\lambda_n x}$$

sous la forme

$$\sum_1^\infty |a_n| e^{-\lambda_n x}=\sum_1^\infty \mu_n |a_n| e^{-\lambda_n x}\frac{1}{\mu_n}\quad (\mu_n>1),$$

où

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{1}{\mu_k}\right)=0,$$

on obtient la condition suivante de la convergence absolue de la série (2)

$$\frac{\mu_n |a_n| e^{-\lambda_n x}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{\mu_k}\right)}=O(1),\ n\to\infty. \tag{3}$$

De là il vient:

$$x>A=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n}\lg\frac{|a_n|\mu_n}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{\mu_k}\right)}. \tag{4}$$

D'où le résultat suivant:

S'il existe une telle suite de nombres $\{\mu_n\}$ $(\mu_n>1)$ *qui satisferait, avec les coefficients et les exposants de la série* (2), *la condition* (4), *alors la série* (2) *converge absolument dans le demi-plan* $\operatorname{Re} s>A$.

Si, dans la relation (4), on écrit $\mu_n = \frac{S_{n+1}}{d_{n+1}}$, où $S_n = \sum_1^n d_k$ est la somme partielle de la série divergente

$$\sum_1^\infty d_k \qquad (d_k > 0),$$

l'abscisse de la convergence absolue est alors

$$A = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \lg \frac{|a_n| S_{n+1} S_n}{d_n}.$$

D'où, pour

$$d_n = \frac{1}{n \lg n \lg_2 n \ldots \lg_{p-1} n} \qquad (\lg_2 n = \lg \lg n, \ \ldots)$$

il résulte

$$A = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \lg |a_n| n \lg n \ldots \lg_p^2 n.$$

La série (2), d'après la relation (3), converge absolument sur l'axe de la convergence absolue si

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \ |\lg(|a_n| n \lg n \ldots \lg_p^2 n) - \lambda_n A| < \infty \qquad (|A| < M).$$

Soit la somme partielle (1) écrite sous la forme

$$S_n(s) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k s} = \sum_{k=1}^n |a_k| e^{-\lambda_k x} \cos(\alpha_k - \lambda_k y)$$
$$+ i \sum_{k=1}^n |a_k| e^{-\lambda_k x} \sin(\alpha_k - \lambda_k y) \quad (\alpha_k = \arg a_k, \quad s = x + yi);$$

soit la partie réelle de cette suite écrite de la façon suivante

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{Re} S_n(s) = \sum_{k=1}^p |a_{m_k}| e^{-\lambda_{m_k} x} \cos(\alpha_{m_k} - \lambda_{m_k} y)$$
$$+ \sum_{k=1}^q |a_{n_k}| e^{-\lambda_{n_k} x} \cos(\alpha_{n_k} - \lambda_{n_k} y),$$
$$(\cos(\alpha_{m_k} - \lambda_{m_k} y) > 0, \quad \cos(\alpha_{n_k} - \lambda_{n_k} y) < 0),$$

où

$$p + q = n, \quad m_p \leqslant n, \quad n_q \leqslant n.$$

Si

$$\text{(6)} \quad 0 < \alpha_2 - \alpha_1 \pm (\lambda_2 - \lambda_1) \leqslant \cdots \leqslant \alpha_{n+1} - \alpha_n \pm (\lambda_{n+1} - \lambda_n) y \leqslant \cdots < \theta < 2\pi,$$

où $0 < \alpha_n = \pm \arg a_n$, alors $0 < |y| < \frac{2\pi - \alpha}{g}$

$$\left(0 < \alpha = \lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) < 2\pi, \ g = \lim_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n}\right)$$

$$p - q = O(1), \ p, q \to \infty.$$

Considérons sur la droite $\operatorname{Re} s = c$ $(c \leqslant A)$ la suite (5), écrite sous la forme

$$(7) \qquad \operatorname{Re} S_n(c) = P_p - Q_q$$

$$\left(P_p = \sum_{k=1}^{p} |a_{m_k}| \, e^{-\lambda_{m_k} c} \cos(\alpha_{m_k} - \lambda_{m_k} y), \qquad Q_q = \sum_{k=1}^{q} |a_{n_k}| \, e^{-\lambda_{n_k} c} \cos(\alpha_{n_k} - \lambda_{n_k} y) \right)$$

où P_p et Q_q satisfont les conditions:

$$(8) \qquad \begin{gathered} 0 < P_1 < P_2 < \cdots < P_p \to \infty, \ p \to \infty, \\ 0 < Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_q \to \infty, \ q \to \infty. \end{gathered}$$

Lorsqu'on prend en cosidération les relations (6) et (8) et sur la base des résultats exposés dans le travail [*], la suite (7) converge si

$$\lim_{p \to \infty} \frac{P_{p+1} - P_p}{\lambda_p'} = \lim_{p \to \infty} \frac{Q_{p+1} - Q_p}{\mu_p} = 0,$$

$$(9) \qquad \lim_{p \to \infty} \frac{(P_{p+1} - P_p)\,\mu_p}{(Q_{p+1} - Q_p)\,\lambda_p'} = 1, \quad \lim_{p \to \infty} \prod_{k=1}^{p} \frac{1 - \mu_k}{1 - \lambda_k'} = C < \infty$$

$$(0 < \lambda_p' < 1, \ \overline{\lim_{p \to \infty}} \ \lambda_p' = 1; \quad 0 < \mu_p < 1, \ \overline{\lim_{p \to \infty}} \ \mu_p < 1).$$

Si

$$\lambda_p' = \frac{\cos(\alpha_{m_p} - \lambda_{m_p} y)}{s_p} \qquad \left(s_p = 1 + \sum_{k=1}^{p} \cos(\alpha_{m_k} - \lambda_{m_k} y) \right)$$

$$\mu_p = \frac{-\cos(\alpha_{n_p} - \lambda_{n_p} y)}{s_p'} \qquad \left(s_p' = 1 - \sum_{k=1}^{p} \cos(\alpha_{n_k} - \lambda_{n_k} y) \right)$$

alors

$$\frac{\prod_{k=1}^{q} (1 - \mu_k)}{\prod_{k=1}^{p} (1 - \lambda_k')} = \frac{s_p}{s_q'} = 1 + \frac{s_p - s_q'}{s_q'} = 1 + \frac{\sum_{1}^{p} \cos(\alpha_k - \lambda_k y)}{s_q'} \qquad (p + q = n).$$

De là, lorsqu'on prend en considération que la suite

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} e^{\theta_k i} \right\} \qquad (0 < \theta_2 - \theta_1 < \cdots < \theta_{n+1} - \theta_n < \cdots < \theta < 2\pi)$$

limitée, il résulte, d'après les conditions (6)

$$\lim_{p, q \to \infty} \frac{s_p}{s_q'} = 1 \qquad (p + q = n).$$

[*] L. Karadžić: *Certains théorèmes se rapportant aux séries à termes constants* ces Publications, № 93 (1963).

Par conséquent, les relations (9) peuvent être écrites sous cette forme-ci:

$$(10) \qquad \lim_{p\to\infty} a_{m_p} e^{-\lambda_{m_p} c} s_p = \lim_{p\to\infty} a_{n_p} e^{-\lambda_{m_p} c} s_p' = 0,$$

$$\lim_{p\to\infty} \left|\frac{a_{m_p}}{a_{n_p}}\right| e^{-(\lambda_{m_p}-\lambda_{n_p}) c} = 1.$$

Donc, la série de Dirichlet (2) possède, sous ces conditions-ci, la somme partielle

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{m_p} a_k e^{-\lambda_k y} \qquad (m_{p+1}-m_p = O(1),\ p\to\infty)$$

dont la partie réelle converge unifoımément dans le domaine D

$$\operatorname{Re} s \geqslant c = \lim_{p\to\infty} \frac{\lg\left|\dfrac{a_{m_p}}{a_{n_p}}\right|}{\lambda_{m_p}-\lambda_{n_p}}.$$

De même, la partie imaginaire de la suite (11) converge uniformément dans le domaine D_1

$$\operatorname{Re} s \geqslant c' = \lim_{p\to\infty} \frac{\lg\left|\dfrac{a_{m'p}}{a_{n'p}}\right|}{\lambda_{m_p}-\lambda_{n_p}}.$$

où $\{m_p'\}$ et $\{n_p'\}$ sont les suites partielles de la suite de sorte que $m_p'-n_p' = O(1)$, $p\to\infty$.

Si

$$(12) \qquad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1,\ \lim_{n\to\infty} (\lambda_{n+1}-\lambda_n) = h \quad (0 \leqslant h < \infty)$$

alors $c = c'$. Par conséquent, la suite (11) converge uniformément pour $\operatorname{Re} s \geqslant c$, si, d'après la condition (10), est satisfaite la condition

$$n a_n e^{-\lambda_n c} = o(1),\ n\to\infty.$$

En vertu de ce qu'on vient d'exposer ci-dessus, on peut formuler ce

Théorème — *Si la suite d'exposants* $\{\lambda_n\}$ *et la suite d'arguments* $\{\arg a_n\}$ *de la série de Dirichlet* (2) *satisfont les conditions* (6) *et* (12) *et si*

$$n a_n e^{-\lambda_n c} = o(1),\ n\to\infty \qquad (c \geqslant C)$$

alors

$$\operatorname{Re} s = C = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$$

est l'abscisse d'ultraconvergence de cette série. Elle converge sur l'axe $\operatorname{Re} s = C$ *dans les intervalles* $0 < |y| < \dfrac{2\pi-\alpha}{g}$ *si* $n a_n e^{-\lambda_n C} = o(1)$, $n\to\infty$.

De la façon ci-dessus exposée, on a donné l'expression analytique pour l'abscisse d'ultraconvergence d'une classe spéciale de séries de Dirichlet. S'il existe quelque autre expression analytique pour l'abscisse d'ultraconvergence de n'importe quelle classe de séries de Dirichlet, l'auteur l'ignore.