PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SERIE: MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 5 (1956)

SUR UN PROCÉDÉ FOURNISSANT DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DONT LES SOLUTIONS CONTINUES ET DIFFÉRENTIABLES PEUVENT ÊTRE DÉTERMINÉES*)

Dragoslav S. Mitrinovitch

1. La solution générale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \tag{1}$$

est la fonction

$$z = F_1(u+v) + G_1(u-v), \tag{2}$$

F_1 et G_1 étant des fonctions quelconques dérivables.

La solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{1}{z}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] \tag{3}$$

est la fonction

$$z = F_2(u+v)\,G_2(u-v), \tag{4}$$

où F_2 et G_2 désignent des fonctions quelconques dérivables.

La relation

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 0$$

détermine toutes les solutions communes aux équations (1) et (3), à savoir

$$z = P(u+v) \quad \text{et} \quad z = Q(u-v),$$

P et Q dénotant des fonctions quelconques dérivables deux fois par rapport aux variables, mises en évidence.

Donc, il faudra que

$$F_2(u+v)\,G_2(u-v) \equiv F_1(u+v) + G_1(u-v) \equiv P(u+v), \tag{A_1}$$

*) Grâce à quelques remarques dues à Monsieur le professeur *J. Aczél* (à Debrecen Hongrie), le texte définitif de cette Note est amélioré dans certaine mesure. Nous en remercions *M. J. Aczél.*

ou

$$(A_2) \qquad F_2(u+v)\, G_2(u-v) \equiv F_1(u+v) + G_1(u-v) \equiv Q(u-v),$$

ce qui conduit respectivement à

$$(B_1) \qquad G_1(u-v) \equiv \text{const}, \qquad G_2(u-v) \equiv \text{const};$$

$$(B_2) \qquad F_1(u+v) \equiv \text{const}, \qquad F_2(u+v) \equiv \text{const}.$$

Comme conséquence du fait indiqué plus haut, nous avons énoncé **[1]** les résultats suivants:[1])

a) La seule solution continue et dérivable de chacune des équations fonctionelles

$$f^{(m)}(x)\, f(y) = f(x) + f^{(n)}(y),$$

$$f^{(m)}(x)\, f(y) = f(x) + f(y),$$

est la fonction $f(x) \equiv 0$ $[f^{(m)}(x) \equiv d^m f/dx^m,\ f^{(n)}(y) \equiv d^n f/dy^n]$;

b) Toutes les solutions continues et dérivables des équations fonctionnelles

$$f(x)\, f(y) = f(x) + f^{(n)}(y),$$
$$f(x)\, f(y) = f(x) + f(y)$$

sont

$$f(x) \equiv 0 \ \text{ et } \ f(x) \equiv 1$$

pour la première équation, et

$$f(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv 2,$$

pour la seconde.

À partir du fait mentionné plus haut, on peut également résoudre des équations fonctionnelles beaucoup plus générales que celles indiquées dans ce qui précède. Ceci sera l'objet de cette Note.

2. Posons:

$$F_1(x) \equiv a\, f^{(p)}(x), \qquad G_1(x) \equiv b\, f^{(q)}(x) + c,$$
$$F_2(x) \equiv f^{(m)}(x), \qquad G_2(x) \equiv f^{(n)}(x),$$
$$\{a\,(\neq 0),\ b\,(\neq 0), \text{c constantes}\}.$$

L'équation (A_1) devient alors

$$(5) \qquad f^{(m)}(x)\, f^{(n)}(y) = a\, f^{(p)}(x) + b\, f^{(q)}(y) + c$$

et les conditions (B_1) et (B_2) sont respectivement

$$(6) \qquad f^{(n)}(y) \equiv k_1, \qquad b\, f^{(q)}(y) + c \equiv k_2;$$

et

$$(7) \qquad f^{(m)}(x) \equiv k_3, \qquad a\, f^{(p)}(x) \equiv k_4.$$

Les k_1, k_2, k_3, k_4 présentent ici et dans la suite des constantes.

---

[1]) Le contenu essentiel de ladite Note **[1]** est ici exposé dans une forme un peu simplifiée.

L'ensemble des équations (5) et (6), ainsi que celui des équations (5) et (7), fournissent toutes les solutions continues et dérivables de l'équation fonctionnelle (5).

Prenons en considération le cas où

$$m > p > n > q. \tag{8}$$

Dans ce cas, (6) fournit $k_1 = 0$. L'équation (5) reçoit la forme

$$b f^{(q)}(y) + c = 0,$$

et c'est pourquoi $k_2 = 0$.

Par suite, la solution continue de l'équation fonctionnelle (5), sous la condition (8), est définie par l'équation différentielle

$$f^{(q)}(y) = -c/b, \tag{9}$$

et cette solution est unique.

La solution de (9) est un polynôme de degré q.

Pour trouver d'autres solutions de (5), partons de (7).

Comme conséquence de la condition (8), tenu compte de (7), on a $k_3 = 0$ et $k_4 = 0$. L'équation (5) devient alors, précisément, l'équation déjà rencontrée (9) ce qui prouve que l'équation (9) n'a pas d'autres solutions continues et dérivables en dehors de celle déterminée par (9).

Passons maintenant au cas

$$m > p = n = q. \tag{10}$$

Alors, de (6) on tire

$$k_1 = (k_2 - c)/b. \tag{11}$$

L'équation (5), pour ce cas, prend la forme

$$ak_1 + k_2 = 0. \tag{12}$$

Les (11) et (12) fournissent

$$k_1 = -c/(a+b), \quad k_2 = ac/(a+b).$$

Par suite, la solution de l'équation fonctionnelle

$$f^{(m)}(x) f^{(q)}(y) = a f^{(q)}(x) + b f^{(q)}(y) + c, \quad (a \neq -b,\ m > q), \tag{13}$$

est définie par

$$f^{(q)}(y) = -c/(a+b). \tag{14}$$

La solution de (13) est un polynôme de degré q, défini à l'aide de (14).

À partir des relations (7), en tenant compte de la condition (10), on obtient précisément la solution (14), ce qui est la seule solution continue et dérivable de (13).

Envisageons ensuite le cas

$$m = n = p < q, \tag{15}$$

pour lequel les relations (6) sont

$$f^{(m)}(y) \equiv k_1, \quad c = k_2,$$

ce qui, remplacé dans (5), donne

$$k_1^2 = ak_1 + c.$$

Par conséquent, la solution de l'équation fonctionnelle

$$f^{(m)}(x)\, f^{(m)}(y) = a f^{(m)}(x) + b f^{(q)}(y) + c, \quad (m < q), \tag{16}$$

est déterminée par l'équation

$$f^{(m)}(y) \equiv \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4c}}{2}.$$

En partant de (7), compte tenu de (15), on retrouve la solution déjà obtenue de l'équation (16).

Notre but n'est pas d'épuiser tous les cas qui peuvent se présenter, en étudiant l'équation fonctionnelle (5), et c'est pourquoi nous finirons par constater que toutes les solutions continues et dérivables de l'équation fonctionnelle (5) sont des polynômes, qui se réduisent, dans certains cas, à une constante.

3. Posons:

$$F_1(x) \equiv f(x), \quad G_1(x) \equiv f(x),$$

$$F_2(x) \equiv f(x) + A\, g(x), \quad G_2(x) \equiv f(x) + B\, g(x),$$

avec A, B constantes arbitraires.

L'équation (A_1) devient, dans ce cas,

$$[f(x) + A\, g(x)]\ [f(y) + B\, g(y)] = f(x) + f(y). \tag{17}$$

En appliquant le procédé de notre Note **[1]**, résumé ici, on obtient le résultat que voici:

Les solutions continues et dérivables de l'équation fonctionnelle (17) sont:

$$1^\circ \quad f(x) \equiv \frac{A\, {k_1}^2}{2B + (A - B)k_1}, \quad g(x) \equiv \frac{2k_1 - {k_1}^2}{2B + (A - B)k_1};$$

$$2^\circ \quad f(x) \equiv \frac{B\, k_2^2}{2A + (B - A)k_2}, \quad g(x) \equiv \frac{2k_2 - k_2^2}{2A + (B - A)k_2},$$

k_1 et k_2 étant des constantes arbitraires, telles que

$$2B + (A - B)\, k_1 \neq 0, \quad 2A + (B - A)k_2 \neq 0.$$

Pour $A = 0$ ou $B = 0$, la solution est

$$f(x) \equiv 0, \quad g(x) \text{ arbitraire.}$$

Pour $A = B = 0$ la solution est

$$f(x) \equiv 2, \quad g(x) \text{ arbitraire.}$$

4. Prenons maintenant le cas assez général suivant

$$
(18)\quad
\begin{aligned}
F_1[x] &\equiv A_0 f^{(m)}(x) + A_1 f^{(m-1)}(x) + \cdots + A_{m-1} f'(x) + A_m f(x),\\
G_1[x] &\equiv B_0 f^{(n)}(x) + B_1 f^{(n-1)}(x) + \cdots + B_{n-1} f'(x) + B_n f(x),\\
F_2[x] &\equiv C_0 f^{(p)}(x) + C_1 f^{(p-1)}(x) + \cdots + C_{p-1} f'(x) + C_p f(x),\\
G_2[x] &\equiv D_0 f^{(q)}(x) + D_1 f^{(q-1)}(x) + \cdots + D_{q-1} f'(x) + D_q f(x),
\end{aligned}
$$

où A_i, B_i, C_i, D_i sont des constantes.

L'équation (A_1) prend la forme

$$(19)\qquad F_2[x]\, G_2[y] = F_1[x] + G_1[y].$$

Les conditions (B_1) et (B_2) sont respectivement:

$$(20)\qquad G_1[y] \equiv k_1, \quad G_2[y] \equiv k_2;$$

et

$$(21)\qquad F_1[x] \equiv k_3, \quad F_2[x] \equiv k_4.$$

Les relations (19) et (20) d'une part, et celles (19) et (21) d'autre part fournissent toutes les solutions continues et dérivables de l'équation fonctionnelle (19).

Par un choix convenable des expressions différentielles F_1, F_2, G_1 G_2 y figurant nous sommes ainsi dans la possibilité de former, d'une manière systématique, des équations fonctionnelles de types divers dont la solution continue et dérivable peut être déterminée.

5. Les équations fonctionnelles dont il s'agit ici pourraient être résolues également à l'aide des artifices différents.

Nous allons illustrer ceci par deux équations fonctionnelles particulières, considérées dans ce qui précède.

Envisageons, tout d'abord, l'équation

$$(22)\qquad f(x)\, f(y) = f(x) + f(y).$$

Pour $y = x$, il vient $f^2(x) = 2f(x)$, donc $f(x) \equiv 0$ ou $f(x) \equiv 2$. Comme $f(x) \equiv 0$, $f(y) \equiv 2$ (ou l'inverse) n'est pas solution de l'équation (22), il vient

$$f(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv 2,$$

ce qui sont les solutions continues et dérivables de l'équation (22).

La méthode générale, qu'on peut appliquer à l'équation fonctionnelle

$$f^{(m)}(x) f(y) = f(x) + f^{(n)}(y),$$

pour trouver ses solutions continues et dérivables, consiste en ceci: si $f(y)$ n'est pas constant, on peut substituer à y deux valeurs y_1 et y_2, telles que

$$f(y_1) \equiv a_1, \quad f(y_2) \equiv a_2,$$

où a_1 et a_2 désignent deux constantes différentes.

On a alors

$$a_1 f^{(m)}(x) = f(x) + b_1 \qquad (b_1 \equiv f^{(n)}(a_1)),$$

$$a_2 f^{(m)}(x) = f(x) + b_2 \qquad (b_2 \equiv f^{(n)}(a_2)),$$

On en tire

$$(a_2 - a_1) f(x) = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

et ensuite

$$f(x) \equiv \text{const.}$$

Si $m > 0$, on obtient comme solution $f(x) \equiv 0$.

De même si $m = 0$, $n > 0$, on trouve: $f(x) \equiv 0$ et $f(x) \equiv 1$.

6. Tout récemment, *J. ACZÉL* **[2]** a donné un bel aperçu, bien documenté, sur des équations fonctionnelles. Cet aperçu est suivi d'un index bibliographique contenant les 64 nötes, mémoires et articles consacrés à des équations fonctionnelles.

Parmi de nombreuses équations citées dans l'étude **[2]** on ne rencontre pas les équations fonctionnelles considérées dans cette Note.

Remarque ajoutée sur l'épreuve.

Monsieur le Professeur *J. ACZÉL* a bien voulu lire le manuscript de cette Note et il nous a donné, dans une lettre, quelques observations intéressantes sur des résultats énoncés dans le présent article, ce dont nous lui sommes fort reconnaissants.

Nous pensons revenir sur le sujet de cette Note pour déterminer les solutions de l'équation fonctionnelle

$$F_1(x) + G_1(y) = F_2(x)\, G_2(y)$$

sans rien supposer des fonctions F_1, F_2, G_1, G_2.

Dans l'article en projet nous confronterons également les résultats de la présente Note avec ceux de *H. W. Pexider* **[3]**, de *C. Stephanos* **[4]**, de *T. Levi-Cività* **[5]**, de *P. Stäckel* **[6]**, de *O. Sutô* **[7]**.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. MITRINOVITCH:

Sur une équation fonctionnelle (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 237, 1953, p. 550 — 551).

[2] Я. АЦЕЛЬ:

Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений (Успехи математических наук, том XI, выпуск 3 (69), 1956, стр. 1—68).

[3] H. W. PEXIDER:

Über symmetriche Funktionen von unabhängigen Variablen (Archiv der Mathematik und Physik (3), Bd. 6, 1903, S. 45—59).

[4] C. STEPHANOS:

Sur une catégorie d'équations fonctionnelles (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo t. 18, 1904, p. 360—362).

[5] T. LEVI-CIVITÀ:

Sulle funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo $f(x+y) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) Y_i(y)$ (Rendicoti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, vol. 22_2, 1913, p. 181—183).

[6] P STÄCKEL:

Sulla equazione funzionale $f(x+y) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) Y_i(y)$. (Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, vol. 22_2, 1913, p. 392—393).

[7] A. SÛTÔ:

Studies on some functional equations (The Tôhoku Mathematical Journal, t. 6, 1914, p. 1—15, p. 82—101).

REZIME

O JEDNOM POSTUPKU KOJI DAJE FUNKCIONALNE JEDNAČINE ČIJA SE NEPREKIDNA I DIFERENCIJABILNA REŠENJA MOGU ODREDITI

Dragoslav S. Mitrinović

U ovom članku je generalisan jedan ranije objavljen piščev rezultat [1] o funkcionalnim jednačinama. Između ostalih tretirane su jednačine

$$f^{(m)}(x) f^{(n)}(y) = a f^{(p)}(x) + b f^{(q)}(x) + c, \tag{1}$$

$$[f(x) + a g(x)]\ [f(y) + b g(y)] = f(x) + f(y), \tag{2}$$

$$(a,\ b,\ c \text{ konstante; } f^{(k)}(t) \equiv d^k f(t)/dt^k)$$

kao i druge opštijeg oblika.

Tako, na primer, za jednačinu (2) dokazan je rezultat:

Neprekidna i diferencijabilna rešenja funkcionalne jednačine (2) su:

$$1^\circ\quad f(x) \equiv \frac{a k_1^2}{2b + (a-b) k_1},\quad g(x) = \frac{2k_1 - k_1^2}{2b + (a-b) k_1};$$

$$2^\circ\quad f(x) \equiv \frac{b k_2^2}{2a + (b-a) k_2},\quad g(x) \equiv \frac{2k_2 - k_2^2}{2a + (b-a) k_2},$$

gde su k_1 i k_2 proizvoljne konstante pod uslovom da je

$$2b + (a-b) k_1 \neq 0, \qquad 2a + (b-a) k_2 \neq 0.$$

Dokazani su i ovi rezultati:

1° Jedino neprekidno i diferencijabilno rešenje funkcionalne jednačine

$$f^{(m)}(x) f(y) = f(x) + f^{(n)}(y) \tag{3}$$

je funkcija $f(x) \equiv 0$;

2° Sva neprekidna i diferencijabilna rešenja funkcionalne jednačine

$$f(x) f(y) = f(x) + f^{(n)}(y) \tag{4}$$

su funkcije:

$$f(x) \equiv 0, \qquad f(x) \equiv 1.$$

Jednačine (3) i (4) su partikularni slučajevi jednačine (1), koja je u ovom članku detaljno obrađena.