PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 91 (1963)

ZNAČAJ OBVOJNICA U NEKIM PROBLEMIMA NEBESKE MEHANIKE I DINAMIKE ZVEZDANIH SISTEMA

Dobrivoje Mihailović

(Primljeno 5. decembra 1962)

U kvalitativnom istraživanju dinamičkih problema obvojnice zauzimaju jedno posebno mesto. Cilj je ovoga članka da prikaže način korišćenja obvojnica u kvalitativnoj analizi problema s jedne strane iz okvira klasične Nebeske mehanike, a s druge — iz savremene problematike Dinamike zvezdanih sistema.

Osnovna ideja u ovim problemima u suštini je ista, jer se radi o fiksiranju jednoga domena iz čijih granica ne izlazi razmatranje uočenog kretanja. Sem toga domeni kretanja se utvrđuju na osnovu ograničenog broja rešenja odnosnih dinamičkih jednačina kretanja.

No ovde baš postoji i osnovna razlika u pristupanju kvalitativnom određivanju domena kretanja, na koju želimo da ukažemo.

Pre svega u klasičnoj Nebeskoj mehanici polaznu tačku istraživanja predstavlja odgovarajući sistem diferencijalnih jednačina formiran na bazi opštih zakona klasične mehanike. U Dinamici zvezdanih sistema se, međutim, polazi od parcijalne diferencijalne jednačine tzv. Jeans—Charlier-ove jednačine za određivanje funkcije frekvencije koja definiše raspodelu položaja i brzina kako u stacionarnom, tako i u nestacionarnom stanju zvezdanog sistema. U poslednjem slučaju se radi o problematici koja se ne može tretirati sa stanovišta klasične mehanike, a i aparat klasične matematičke analize je za ovo nedovoljan, te se pored ovoga nužno nameće potreba korišćenja metoda teorije verovatnoće i matematičke statistike.

U prilog ovim opštim konstatacijama navešćemo osnovne ideje dva problema, poznata u nauci, od kojih je naročito drugi danas već u velikoj meri razrađen u Dinamici zvezdanih sistema.

1. — U svojoj studiji [1] *A. Wilkens* je postavio problem određivanja obvojnice Hill-ovih graničnih krivih u asteroidnom problemu triju tela, pretpostavljajući da su putanje perturbirajućih tela oko njihovog zajedničkog težišta elipse. Smisao postavljanja ovoga problema leži u mogućnosti određivanja domena u ravni kretanja iz koga asteroid ne izlazi.

Pri tome *Wilkens* polazi od diferencijalne jednačine kretanja asteroida i Jacobi-evog integrala (integrala žive sile), dajući ovom poslednjem odgovarajući oblik, pri čemu je uzeta u obzir pretpostavka da je ekscentricitet Jupiter-ove putanje $e \neq 0$. U članku [2] dat je prikaz primene vektorske metode u izvođenju Wilkens-ove forme Jacobi-evog integrala. Naime, ovde se polazi od vektorske diferencijalne jednačine kretanja asteroida:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\vec{r}}{r^3} + \text{grad}\ \Omega, \tag{1}$$

gde je $\vec{r}$ — vektor položaja asteroida prema Suncu, $\vec{r'}$ — vektor položaja Jupitera prema Suncu, a

$$\Omega = m'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\vec{r}\,\vec{r'}}{r'^3}\right). \tag{2}$$

$$r = |\vec{r}|,\ \Delta = |\vec{r'} - \vec{r}|,\ r' = |\vec{r'}|,\ m' \text{ — masa asteroida.}$$

Integral jednačine (1) je

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2}{r} + 2\int\left(\text{grad}\ \Omega\ \frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt + C \quad (C = \text{const}). \tag{3}$$

Uvodeći mesto fiksiranog sistema XSY (S — Sunce) pokretni sistem $\xi S \eta$ čija ξ — osa prolazi kroz J (J — Jupiter), ovaj poslednji zbog uslova $e \neq 0$ vrši oko S neravnomernu rotaciju. U ovome sistemu je

$$\vec{r} = \xi \cdot \vec{e_1} + \eta \cdot \vec{e_2}, \tag{3'}$$

gde su jedinični vektori $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ funkcije vremena. Zato je

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\xi}{dt}\vec{e_1} + \frac{d\eta}{dt}\vec{e_2} + \xi\frac{d\vec{e_1}}{dt} + \eta\frac{d\vec{e_2}}{dt}. \tag{4}$$

Ako se označi $\sphericalangle (XS\xi) = \nu$, dobija se posle jednostavnog računa

$$\vec{v} = \left(\frac{d\xi}{dt} - \eta\frac{d\nu}{dt}\right)\vec{e_1} + \left(\frac{d\eta}{dt} + \xi\frac{d\nu}{dt}\right)\vec{e_2}. \tag{5}$$

Koristeći (2) i (5) dolazi se do Wilkens-ove formule Jacobi-evog integrala

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = C + \frac{2}{r} + 2\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt - r^2\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 - 2\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right)\frac{d\nu}{dt}. \tag{6}$$

Granica oblasti kretanja asteroida će biti definisana uslovnom relacijom

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = 0,$$

tj. jednačina familije Hill-ovih graničnih krivih za slučaj $e \neq 0$ definisana je relacijom:

$$C + \frac{2}{r} + 2\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt - r^2\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 - 2\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right)\frac{d\nu}{dt} = 0. \tag{7}$$

Odavde je *Wilkens* izveo kao specijalan slučaj Darwin-ov oblik jednačine granične krive za slučaj kružnih putanja perturbirajućih tela.

Koristeći se razvijanjem u redove po malim parametrima Wilkens je iz (7) i odgovarajuće izvodne jednačine dobio izraz za obvojnicu Hill-ovih graničnih krivih, čime je određen i domen kretanja asteroida u ravni.

2. — U Dinamici zvezdanih sistema prema *Jeans* — *Charlier*-u se polazi od toga, da se stacionarno stanje zvezdanog sistema izvodi iz opšte funkcije raspodele. Ova funkcija sadrži dva integrala i to: integral žive sile i integral momenta oko ose rotacije, [3]. Komponenta brzine paralelna osi rotacije $Z=0$ predstavlja treći integral kojim je karakterisano kretanje sistema u blizini galaktičke ravni.

S obzirom na podelu sistema na podsisteme *B. Lindblad* u pomenutom članku [3] usvaja sledeći oblik za funkciju frekvencije

$$F(I_1, I_2) = \sum_k f(I_1 - kI_2), \tag{8}$$

gde je

$$I_1 = \Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 - 2V, \quad I_2 = \Theta\tilde{\omega}. \tag{9}$$

Pri tome I_1 i I_2 označavaju prva dva navedena integrala, $\tilde{\omega}, \theta, z$ predstavljaju cilindrične koordinate, a Π, Θ, Z — odgovarajuće komponente brzine, dok V predstavlja potencijal gravitacije, a k — jednu veličinu koja uzima niz realnih vrednosti ispod jedne maksimalne vrednosti m.

Kretanje svake zvezde iz sistema moguće je po *Lindblad*-u predstaviti tačkom u sistemu $I_1 I_2$, pri čemu se I_1 i I_2 tretiraju kao promenljive, što omogućuje da se odbaci neophodnost uslova stacionarnosti galaktičkog sistema.

Kako I_2 može biti proizvoljno, a $I_1 \leqslant 0$, to linija $I_1 = 0$, tj. osa I_2 predstavlja jednu od granica domena u čijoj je unutrašnjosti moguće kretanje zvezda.

Za određivanje druge granice ovoga domena imamo pre svega da je

$$\Theta = \frac{I_2}{\tilde{\omega}}, \tag{10}$$

čijom zamenom u integral I_1, a vodeći računa da je

$$\Pi^2 + Z^2 > 0,$$

dolazimo do nejednakosti

$$I_1 \geqslant \frac{I_2^2}{\tilde{\omega}^2} - 2V.$$

Drugu granicu domena kretanja zvezde predstavlja u sistemu $I_1 I_2$ parabola

$$I_2^2 = \tilde{\omega}^2 (I_1 + 2V) \tag{11}$$

koju *Lindblad* naziva *karakterističnim dijagramom* [4].

Dinamičko značenje tačke (I_1, I_2) na karakterističnom dijagramu proizilazi iz opštih razmatranja problema, [3], [4], [5] u čije detalje nećemo ulaziti. Napomenimo samo to, da tačka na ovome dijagramu odgovara onoj zvezdi koja ima samo komponentu brzine Θ, tj. vrši čisto rotaciono kretanje.

Da se odredi granica celokupnog mogućeg domena kretanja treba naći obvojnicu karakterističnih dijagrama (11) koja odgovara tačkama galaktičke ravni za koje koordinata $\tilde{\omega}$ dostiže maksimum za dato V.

Vodeći računa o tome da je varijabilni član u potencijalu V u galaktičkoj ravni II stepena po parametru $\tilde{\omega}$, kao i o tome, da I_1 i I_2 treba smatrati konstantama, diferenciranjem jednačine (11) po $\tilde{\omega}$ nalazimo

$$2\tilde{\omega}(I_1 + 2V) + 2\tilde{\omega}^2 \frac{\partial V}{\partial \tilde{\omega}} = 0,$$

ili

$$I_1 = -\tilde{\omega}\frac{\partial V}{\partial \tilde{\omega}} - 2V. \tag{12}$$

Zamenom u (11) nalazimo

$$I_2^2 = -\tilde{\omega}^3 \frac{\partial V}{\partial \tilde{\omega}}. \tag{13}$$

Skup relacija

$$I_2^2 = \tilde{\omega}^2 (I_1 + 2V) \quad \text{i} \quad I_2^2 = -\tilde{\omega}^3 \frac{\partial V}{\partial \tilde{\omega}} \tag{14}$$

definiše parametarski oblik jednačine obvojnice *Lindblad*-ovih karakterističnih dijagrama.

LITERATURA

[1] A. Wilkens: *Über die Grenzkurven und ihre Einhülende im asteroidischen Dreikörperproblem bei elliptischer Bahn des störenden Körpers* (Probleme der Astronamie, Festschrift für Hugo v. Seeligerr, Berlin, 1924, S. 153—168).

[2] D. Mihailović: *Primedba o Jacobi-evom integralu u asteroidnom problemu za slučaj eliptične putanje perturbirajućeg tela* (Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije, III, 3—4, Beograd, 1951, str. 61—65).

[3] B. Lindblad: *Cosmogonic consequences of a theory of the stellar system* (Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd 19a, № 35, Stockholm, 1926).

[4] П. П. Паренаго: *Курс звёздной астрономии* (Москва, 1946).

[5] E. von der Pahlen: *Einführung in die Dynamik von Sternsystemen* (Basel, 1947).

Zusammenfassung

DIE BEDEUTUNG DER EINHÜLLENDEN IN EINZELNEN PROBLEMEN DER HIMMELSMECHANIK UND DER DYNAMIK VON STERNSYSTEMEN

Dobrivoje Mihailović

In diesem Artikel ist Bedeutung der Einhüllenden in der qualitativen Analysis von zwei charakteristischen Problemen dargestellt. Den Inhalt dieses Artikels macht die Rolle der Einhüllenden in der Bestimmung des Gebietes der Bewegung in dem asteroidischen Dreikörperproblem in dem Fall, wo die Bahnen der störenden Körper die Elipsen sind. Die Resultate, welche in Zusammenhang mit diesem von Wilkens und Mihailović gegeben wurden, sind unter [1] und [2] zitiert.

Die zweite allgemeine Anwendung der Einhüllenden bezieht sich auf das Problem der charakteristischen Diagrammen von Lindblad in der Dynamik der Sternsystemen, [3], [4], [5].

In dem Artikel sind auch die Formierungsweise der Einhüllenden wie auch Diferenze darin gegeben.