PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 89 (1963)

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE HOMOGÈNE DU TROISIÈME ORDRE

Ilija A. Šapkarev

(Reçu le 30 novembre 1962)

Dans cette Note est donnée la solution du probléme de *Mitrinović* que voici:

Examiner si l'équation différentielle

(a) $$(A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3)\,y'''+(B_0x^2+B_1x+B_2)\,y''+(C_0x+C_1)\,y'+y=0$$

admet des solutions particulières de la forme suivante

(b) $$x=a_0+a_1t+a_2t^2\,,\quad y=b_0+b_1t+b_2t^2\,,$$

où

(c) $$A_0,\ A_1, A_2,\ A_3,\ B_0,\ B_1,\ B_2,\ C_0,\ C_1;\quad a_0,\ a_1,\ a_2,\ b_0,\ b_1,\ b_2$$

sont des constantes convenablement choisies.

Puisque

$$y'_x=\dot y/\dot x\,,\quad y''_x=(\dot x\ddot y-\ddot x\dot y)/\dot x^3\,,\quad y'''_x=[(\dot x\dddot y-\dddot x\dot y)\dot x-3\ddot x\,(\dot x\ddot y-\ddot x\dot y)]/\dot x^5\,,$$

l'équation (a) devient

(d) $$(A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3)\,[(\dot x\dddot y-\dddot x\dot y)\,\dot x-3\,\ddot x\,(\dot x\ddot y-\ddot x\dot y)]$$
$$+(B_0x^2+B_1x+B_2)\,(\dot x\ddot y-\ddot x\dot y)\,\dot x^2+(C_0x+C_1)\,\dot x^4\dot y+\dot x^5y=0\,.$$

Remplaçons dans l'équation (d) x, y donnés par (b) et ses dérivées. Nous obtenons ainsi une équation algébrique du septième degré en t, laquelle sera nommée: *équation* (E).

Pour que (b) soit une solution de l'équation (a), il faut et il suffit que le polynôme de l'équation (E) s'annulle identiquement. On obtient de cette manière les huit équations entre les coefficients (c). On peut déterminer $A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2, C_0, C_1$ en fonction des $a_k, b_k\,(k=0,\,1,\,2)$.

L'équation (a) a des solutions particulières de la forme (b) dans les cas suivants:

1.1. $a_2b_2\neq 0\,,\quad \alpha_{12}\neq 0\,,\quad a_1\neq 0\,,$

$$A_0=-4/3,\quad B_0=0\,,\quad C_0=-1\,,\quad C_1=(2\,a_2\alpha_{02}-a_1\alpha_{12})/2\,a_2b_2\,,$$

$$A_1=(2\,a_2b_2B_1-2\,a_1^2b_2-4\,a_2\alpha_{02}+16\,a_0a_2b_2-2\,a_1a_2b_1)/3\,a_2b_2\,,$$

$$A_2=(8\,a_2^2b_2B_2-24\,a_0a_2^2b_2A_1+2\,a_1^2a_2b_2B_1+8\,a_0a_2^2b_2B_1+48\,a_0^2a_2^2b_2$$
$$+8\,a_1^2a_2^2b_0-4\,a_1^3a_2b_1-a_1^4b_2)/12\,a_2^2b_2\,,$$
$$A_3=(32\,a_0^3a_2^2b_2+2\,a_1^4a_2b_0-a_1^5b_1-24\,a_0a_2^2b_2A_2-24\,a_0^2a_2b_2A_1$$
$$+4\,a_1^2a_2b_2B_2+4\,a_0a_1^2a_2b_2B_1)/24\,a_2^2b_2\,,$$

B_1, B_2 sont des constantes arbitraires et

$$\alpha_{ik}=\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} \qquad (i,k=0,1,2);$$

1.2. $a_2b_2\neq 0$, $\alpha_{12}\neq 0$, $a_1=0$,

$$C_0=-1,\ C_1=\alpha_{02}/b_2,\ A_0=(2\,B_0-4)/3,\ A_1=(4\,a_0b_2B_0-9\,a_0b_2A_0$$
$$+2\,b_2B_1+4\,a_2b_0)/3\,b_2\,,$$
$$A_2=(2\,a_0^2B_0+2\,a_0B_1+2\,B_2-9\,a_0^2A_0-6\,a_0A_1)/3\,,$$
$$A_3=-(a_0^3A_0+a_0^2A_1+a_0A_2)\,,$$

B_0, B_1, B_2 sont des constantes arbitraires;

1.3. $a_2b_2\neq 0$, $\alpha_{12}=0$,

$$C_0=-1\,,\quad C_1=\alpha_{02}/b_2\,,$$

A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2 sont des constantes arbitraires.

2. $a_2=0$, $b_2\neq 0$,

$$B_0=-(2C_0+1)/2,\qquad B_1=[(2a_0b_2-a_1b_1)(C_0+1)-2b_2C_1]/2b_2,$$
$$B_2=[(2a_0^2b_2-a_0a_1b_1)\,C_0-a_1b_1C_1-2a_0b_2B_1+a_0^2b_2-a_1^2b_0]/2b_2,$$

A_0, A_1, A_2, A_3, C_0, C_1, sont des constantes arbitraires.

3.1. $a_2\neq 0$, $b_2=0$, $a_1\neq 0$, $a_1b_1=2\,a_2b_0$

$$A_0=-4\,(C_0+2)/3,\ B_0=0,$$
$$A_1=(2a_2B_1-4a_2C_1-2a_1^2C_0+8\,a_0a_2C_0-6a_1^2+24a_0a_2)/3a_2,$$
$$A_2=[(48a_0^2a_2^2-8a_0a_1^2a_2-a_1^4)\,C_0-24a_0a_2^2A_1+(2a_1^2a_2+8a_0a_2^2)\,B_1$$
$$+8a_2^2B_2-8a_1^2a_2C_1-6a_1^4+96a_0^2a_2^2]/\,12a_2^2,$$
$$A_3=[-24a_2^3\,(a_0^3A_0+a_0^2A_1+a_0A_2)+4a_1^2a_2^2\,(a_0B_1+B_2)$$
$$-2a_1^4a_2\,(a_0C_0+C_1)-a_1^6]/24a_2^3\,,$$

C_0, C_1, B_1, B_2 sont des constantes arbitraires;

3.2. $a_2\neq 0$, $b_2=0$, $a_1=0$, $b_0=0$,

$$A_0=(2B_0-4C_0-8)/3,$$
$$A_1=(4a_0B_0+2B_1-9a_0A_0-4a_0C_0-4C_1)/3,$$
$$A_2=[2\,(a_0^2B_0+a_0B_1+B_2)-9a_0^2A_0-6a_0A_1]/3,$$
$$A_3=-(a_0^3A_0+a_0^2A_1+a_0A_2),$$

B_0, B_1, B_2, C_0, C_1 sont des constantes arbitraires.

4. $a_2 = b_2 = 0$, $C_0 = -1$, $C_1 = \alpha_{01}/b_1$,
A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2 sont des constantes arbitraires.

Aux cas indiqués dans ce qui précède correspondent respectivement les exemples suivants:

1.1. 1° $(32x^3 - 144x^2 + 134x - 33)y''' - 24(x+1)y'' + 24(x+1)y' - 24y = 0$,

$$x = 1 + t + t^2,$$
$$y = 1 - t + t^2;$$

2° $(36x^3 - 372x^2 + 370x - 92)y''' - 27(2x+3)y'' + 9(3x+20)y' - 27y = 0$.

$$x = 1 + 2t + 3t^2,$$
$$y = 3 + 2t + t^2;$$

1.2. $(12x^3 + 2x^2 - 18x + 4)y''' + (24x^2 + 3x + 6)y'' - 3xy' + 3y = 0$,

$$x = 1 + 2t^2,$$
$$y = 2 + 3t + 4t^2;$$

3.1. $(324x^3 - 522x^2 + 174x + 20)y''' - 81(x+1)y'' - 81(x+1)y' - 81y = 0$,

$$x = 1 + 2t + 3t^2,$$
$$y = 1 + 3t;$$

3.2. $(10x^3 - 28x^2 + 20x - 2)y''' - 3(x^2 + x + 1)y'' - 3(x+1)y' - 3y = 0$,

$$x = 1 + t^2,$$
$$y = t.$$