PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA – SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 81 (1962)

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

Petar M. Vasić

1. Dans l'article [1] on montre que l'équation

$$x^2(ax^n+b)y''+x(cx^n+d)y'+(ex^n+f)y=0 \tag{1. 1}$$

$$\{a, b, c, d, e, f, n\,(\neq 0) \text{ constantes}\}$$

a pour solution particulière la fonction déterminée à l'aide de la relation

$$y^3+pyx^{2k+n/3}+qx^{3k}=0 \tag{1. 2}$$

$$\{k, p\,(\neq 0), q \text{ constantes}\}$$

si $a, b, c, d, e, f, p, q, n, k$ satisfont à certaines conditions.

2. Dans cette Note, nous allons démontrer que l'équation (1. 1) admet, dans quelques cas, une solution particulière $y(x)$ définie par

$$\sum_{\nu=0}^{r} p_\nu x^{k_\nu} y^\nu = 0 \quad (p_\nu, k_\nu \text{ constantes}) \tag{2. 1}$$

pour $n\,(\neq 0)$ fixe et $r\in\{2, 3, \ldots\}$.

Prenons l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2}+\left(\frac{ff'}{f^2+\beta}-\frac{f''}{f'}\right)\frac{dz}{dx}-\frac{A^2(f')^2}{f^2+\beta}\,z=0 \tag{2. 2}$$

$$\{A\,(>0), B \text{ constantes}; f\equiv f(x)\}$$

dont la solution est donnée dans l'article [2].

Pour $\beta=B^2\,(B>0)$ l'équation (2. 2) se ramène, au moyen de la transformation $z(x)=\omega(\xi)$, $f(x)=B\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\xi}{B}$, à l'équation

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2}-\frac{A^2}{B^2}\,\omega=0$$

Par suite, l'intégrale générale de l'équation (2. 1), pour $\beta=B^2\,(B>0)$, est

$$z=C_1\left(f+\sqrt{f^2+B^2}\right)^A+C_2\left(f+\sqrt{f^2+B^2}\right)^{-A}. \tag{2. 3}$$

La solution (2. 3) peut être mise sous la forme

(2. 4)
$$2f = g(z)^{1/A} - B^2 g(z)^{-1/A},$$
où l'on a
$$g(z) = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4\,C_1 C_2}}{2\,C_1}.$$

La relation (2. 4), si l'on pose $1/A = 2m+1$ (m nombre naturel) et $-B^2 C_1^{2m+1} = C_2^{2m+1}$, se ramène à

(2. 5)
$$(2\,C_1)^{2m+1} f = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{2m+1}{2\nu} z^{2m+1-2\nu} \{z^2 + 4\,C_1^2 B^{2/(2m+1)}\}^{\nu}$$

ou bien

(2. 6)
$$2\,C_1^{2m+1} f = z^{2m+1} + (2m+1) \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu} \binom{2m-\nu}{\nu-1} C_1^{2\nu} B^{2\nu/(2m+1)} z^{2m+1-2\nu}.$$

Si l'on pose $f(x) = x^{-n/2}$ et $z = x^{-k-n/6} y$ dans (2. 2) et (2. 6), on obtient le résultat suivant:

L'équation différentielle

(2. 7)
$$x^2 (B^2 x^n + 1)\, y'' + x \left(B^2 \frac{n-12k+6}{6} x^n + \frac{3-6k-n}{3}\right) y'$$
$$+ \left[B^2 \frac{18k^2 - 3kn - n^2}{18} x^n + \left(\frac{n}{6}+k\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2m+1}\right)^2\right] y = 0$$

a comme solution particulière la fonction $y = y(x)$ *donnée par*

(2. 8)
$$2\,C_1^{2m+1} x^{-n/2} = x^{(-k-n/6)(2m+1)} y^{2m+1}$$
$$+ (2m+1) \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu} \binom{2m-\nu}{\nu-1} C_1^{2\nu} B^{2\nu/(2m+1)} x^{(-k-n/6)(2m+1-2\nu)} y^{2m+1-2\nu}.$$

Supposons maintenant que $\beta = -B^2$ $(B > 0)$. Pour $|f| > B$ l'équation (2. 2) se transforme par le changement $z(x) = \omega(\xi)$, $|f(x)| = B \operatorname{ch} \dfrac{\xi}{B}$, en l'équation suivante
$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2} - \frac{A^2}{B^2}\omega = 0.$$

Ainsi, si $\beta = -B^2 (B > 0)$, la solution de (1. 1), pour $|f(x)| > B$, est

(2. 9)
$$z = C_1 (|f| + \sqrt{f^2 - B^2})^A + C_2 (|f| + \sqrt{f^2 - B^2})^{-A}$$

qui s'écrit aussi sous la forme

(2. 10)
$$2\,|f| = g(z)^{1/A} + B^2 g(z)^{-1/A} \left\{g(z) = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4\,C_1 C_2}}{2\,C_1}\right\}.$$

Posons $1/A = r$ (r nombre naturel > 1) et $B^2 C_1^r = C_2^r$. L'égalité (2. 10) devient alors

$$2C_1^r|f| = z^r + r\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]}(-1)^\nu \frac{1}{\nu}\binom{r-\nu-1}{\nu-1}C_1^{2\nu}B^{2\nu/r}z^{r-2\nu}. \tag{2. 11}$$

Pour $f(x) = x^{-n/2}$ et $z = x^{-k-n/6}\,y$, on a:

L'équation différentielle

$$x^2(-B^2x^n+1)y'' + x\left(-B^2\frac{n-12k+6}{6}x^n + \frac{3-6k-n}{3}\right)y' \tag{2. 12}$$
$$+\left[-B^2\frac{18k^2-3kn-n^2}{18}x^n + \left(\frac{n}{6}+k\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{1}{r}\right)^2\right]y = 0$$

pour $x^{-n/2} > B\,(>0)$ *a pour solution particulière la fonction* $y = y(x)$ *définie par*

$$2C_1^r x^{-n/2} = x^{(-k-n/6)r}\,y^r \tag{2. 13}$$
$$+r\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]}(-1)^\nu \frac{1}{\nu}\binom{r-\nu-1}{\nu-1}C_1^{2\nu}B^{2\nu/r}x^{(-k-n/6)(r-2\nu)}y^{r-2\nu}.$$

On peut appliquer le même procédé à l'équation (2. 2) dans le cas où $\beta = B^2 < 0$ pour $|f| < B\,(>0)$.

3. Le résultat ici mentionné, pour $m = 1$, $3C_1^2B^{2/3} = p$, $-2C_1^3 = q$, dans le premier cas et $r = 3$, $-3C_1^2B^{2/3} = p$, $-2C_1^3 = q$, dans le deuxième cas, est en accord avec celui obtenu dans article [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. M. Vasić: *Sur une équation différentielle du second ordre.* Publications de la Faculté d'Electrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique № 73, 1962, p. 9-11.

[2] D. S. Mitrinović: *Compléments au Traité de Kamke,* Note II. Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de Serbie, t. VII, 1955, p. 161 — 164.

[3] I. Šapkarev: *Sur la solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre.* Publications de la Faculté d'Electrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, № 80, 1962, p. 9—12.