PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 80 (1962)

SUR LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

Ilija A. Šapkarev

1. Dans l'article [1] *D. Perčinkova* a démontré que l'équation

$$x^2(1+x^3)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{3}{2}x\frac{dy}{dx}+y=0 \tag{1. 1}$$

a comme solution particulière la fonction $y=y(x)$ définie par

$$y^3+3\,xy+2\,x^3=0.$$

Dans l'article [2] *D. Perčinkova* a montré que l'équation plus générale suivante

$$x^2(A+Bx^3)\frac{d^2y}{dx^2}+Cx\frac{dy}{dx}+y=0 \tag{1. 2}$$

a comme solution particulière la fonction $y=y(x)$ définie par

$$y^3+3\,axy+bx^3=0$$

si l'on a

$$A=1, \qquad b^2-4\,a^3B=0, \qquad C=-\frac{3}{2}.$$

Elle a montré qu'on peut déterminer la solution générale de l'équation en question sous la forme paramétrique.

Dans le livre [3] on montre que l'équation

$$(ax^3+b)\frac{d^2y}{dx^2}+cx^2\frac{dy}{dx}+xy=0 \tag{1. 3}$$

a pour solution particulière la fonction déterminée à l'aide de la relation suivante

$$y^3+pxy+q=0 \qquad (p\neq 0)$$

dans les cas où l' on admet

$$a=-2, \qquad b=-\frac{27\,q^2}{2\,p^3}, \qquad c=-3.$$

Dans l'article [4] *P. Vasić* a démontré que l'équation

$$x^2(ax^n+b)\frac{d^2y}{dx^2}+x(cx^n+d)\frac{dy}{dx}+(ex^n+f)\,y=0 \tag{1. 4}$$

a comme solution particulière la fonction $y=y(x)$ définie par équation

$$y^3+pyx^{n/3+2k}+qx^{3k}=0 \quad \{n\,(\neq 0),\ k,\ p\,(\neq 0),\ q \text{ constantes}\}$$

si l'on a

$$a=r, \qquad b=\frac{27\,q^2}{4\,p^3}\,r, \qquad c=\frac{6-12\,k+n}{6}\,r, \qquad d=\frac{9\,q^2}{4\,p^3}\,(3-6\,k-n)\,r,$$

$$e=\frac{18\,k^2-3\,kn-n^2}{18}\,r, \qquad f=\frac{9\,q^2}{4\,p^3}\,k\,(n+3\,k)\,r$$

(r constante quelconque).

2. Dans la présente Note nous allons montrer que l'équation différentielle

$$x^2\,(27\,a+4\,b^3\,x^{-2\alpha})\,\frac{d^2y}{dx^2}+x\,[27\,a\,(2\,\beta+1)+4\,b^3\,(2\,\beta-\alpha+1)\,x^{-2\alpha}]\,\frac{dy}{dx} + [3\,a\,(9\,\beta^2-\alpha^2)+4\,b^3\,\beta\,(\beta-\alpha)\,x^{-2\alpha}]\,y=0 \tag{2. 1}$$

admet comme solution particulière la fonction déterminée par

$$ay^3+byx^{-2\beta}-x^{\alpha-3\beta}=0 \tag{2. 2}$$

$$\{a\,(\neq 0),\ b,\ \alpha\,(\neq 0),\ \beta \text{ constantes}\}$$

et que sa solution générale peut être mise sous une forme explicite que voici

$$y=C_1\left(x^{\alpha-3\beta}+\sqrt{x^{2(\alpha-3\beta)}+\frac{4\,b^3}{27\,a}\,x^{-6\beta}}\right)^{1/3} + C_2\left(x^{\alpha-3\beta}-\sqrt{x^{2(\alpha-3\beta)}+\frac{4\,b^3}{27\,a}\,x^{-6\beta}}\right)^{1/3}. \tag{2. 3}$$

Pour démontrer ceci, partons de l'équation

$$(Ax^2+Bx+C)\,\frac{d^2y}{dx^2}+(Dx+E)\,\frac{dy}{dx}+y=0 \tag{2. 4}$$

et déterminons les constantes y intervenant sous la condition que la fonction donnée par équation

$$ay^3+by-x=0 \qquad (a\,(\neq 0),\ b \text{ constantes}) \tag{2. 5}$$

soit une solution particulière de l'équation (2. 4).

Puisque

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}$$

et étant donné que, d'aprés (2. 5),

$$x=ay^3+by, \qquad \frac{dx}{dy}=3\,ay^2+b, \qquad \frac{d^2x}{dy^2}=6\,ay$$

l'équation (2. 4) devient

$$3a^3(2A-3D-9)y^7+3a^2b(4A-5D-9)y^5+3a^2(2B-3E)y^4 + ab^2(6A-7D+9)y^3+6ab(B-E)y^2+(6aC-b^3D-b^3)y-b^2E=0. \tag{2. 6}$$

Le polynôme figurant au premier membre de l'équation (2. 6) s'annule identiquement si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$3a^3(2A-3D-9)=0,$$
$$3a^2b(4A-5D-9)=0,$$
$$3a^2(2B-3E)=0,$$
$$ab^2(6A-7D-9)=0,$$
$$6ab(B-E)=0,$$
$$6aC-b^3D-b^3=0,$$
$$b^2E=0.$$

Il s'ensuit que

$$A=-9, \qquad B=0, \qquad C=-\frac{4b^3}{a}, \qquad D=-9 \qquad E=0.$$

Par suite, l'équation (2. 4) prend la forme suivante

$$(27ax^2+4b^3)\frac{d^2y}{dx^2}+27ax\frac{dy}{dx}-3ay=0 \tag{2. 7}$$

et sa solution générale due à *Zbornik* [5] est donnée par

$$y=C_1\left(x+\sqrt{x^2+\frac{4b^3}{27a}}\right)^{1/3}+C_2\left(x-\sqrt{x^2+\frac{4b^3}{27a}}\right)^{1/3}. \tag{2. 8}$$

L'équation (2. 7) par la changement

$$x=t^\alpha, \quad y=t^\beta z \qquad (\alpha\neq 0)$$

lequel fournit

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t^{\beta-\alpha+1}}{\alpha}\frac{dz}{dt}+\frac{\beta}{\alpha}t^{\beta-\alpha}z,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{t^{\beta-2\alpha+2}}{\alpha^2}\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{2\beta-\alpha+1}{\alpha^2}t^{\beta-2\alpha+1}\frac{dz}{dt}+\frac{\beta(\beta-\alpha)}{\alpha^2}t^{\beta-2\alpha}z$$

se transforme en équation (2. 1). Le même changement transforme l'équation (2. 5) en (2. 2).

Par suite, la solution generale de l'équation (2. 1) est donnée par (2. 3).

Les cas $a=0$ ou $\alpha=0$ sont très simples et ils ne sont pas traités, car en partant de (2. 2) on obtient que y est un polynôme en x.

3. Pour $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$, $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$ l'équation (2. 1) se ramène à (1. 1) et sa solution générale est

$$y=C_1\left(x^3+\sqrt{x^3+x^6}\right)^{1/3}+C_2\left(x^3-\sqrt{x^3+x^6}\right)^{1/3}.$$

Pour $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $a' = -\frac{1}{b}$, $b' = -\frac{3a}{b}$, (dans l'équation (2. 1) les constantes a et b sont remplacées par a' et b' respectivement), l'équation (2. 1) se ramène à (1. 2) et sa solution générale est

$$y = C_1\left(x^3 + \sqrt{x^6 + \frac{4a^3}{b^2}x^3}\right)^{1/3} + C_2\left(x^3 - \sqrt{x^6 + \frac{4a^3}{b^2}x^3}\right)^{1/3}.$$

Pour $\alpha = -\frac{3}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{q}$, $b = -\frac{p}{q}$ l'équation (2. 1) devient (1. 3) et sa solution générale est donnée par

$$y = C_1\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}x^3}\right)^{1/3} + C_2\left(1 \quad \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}x^3}\right)^{1/3}.$$

Pour $\alpha = -\frac{n}{2}$, $\beta = -\frac{n}{6} - k$, $a = -\frac{1}{q}$, $b = -\frac{p}{q}$ l'équation (2. 1) devient (1. 4) et sa solution générale est la fonction suivante

$$y = C_1\left(x^{3k} + \sqrt{x^{6k} + \frac{4p^3}{27q^2}x^{n+6k}}\right)^{1/3} + C_2\left(x^{3k} - \sqrt{x^{6k} + \frac{4p^3}{27q^2}x^{n+6k}}\right)^{1/3}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Д. Перчинкова — В'чкова: *За една специјална диференцијална равенка од II ред* (Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите од Н. Р. Македонија, т. VI, Скопје 1955, стр. 22—29)

[2] Д. Перчинкова — В'чкова: *За една диференцијална равенка од II ред* (Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите од Н. Р. Македонија, т. IX, Скопје 1958, стр. 11—13)

[3] D. S. Mitrinović: *Zbornik matematičkih problema*, t. I, troisième édition, Beograd 1962, p. 414—415.

[4] P. M. Vasić: *Sur une équation différentielle*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, serija: Matematika i fizika, № 73, 1962, p. 9—11.

[5] Э. Камке: *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва 1961, стр. 496.