PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 79 (1962)

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE

Letterio Toscano

1. Angelesco a démontré en 1921 (Sur certaines équations différentielles linéaires complétement intégrables, C. R. Acad. des Sciences-Paris, t. 172, p. 40—41) que l'équation différentielle

$$\sum_0^n {}_k (-1)^k \binom{\lambda+n-k}{n-k} P_n^{(n-k)}(x)\, D_x^k\, y=0, \tag{1}$$

où $D_x \equiv \dfrac{d}{dx}$ et $P_n(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ $(\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \cdots \neq \alpha_n)$, a pour intégrales particulières

$$(x-\alpha_1)^{\lambda+n}, \quad (x-\alpha_2)^{\lambda+n}, \ \ldots\ , \quad (x-\alpha_n)^{\lambda+n}.$$

Par suite son intégrale générale est

$$y=C_1(x-\alpha_1)^{\lambda+n}+C_2(x-\alpha_2)^{\lambda+n}+\cdots+C_n(x-\alpha_n)^{\lambda+n}.$$

Récemment, Blagoj S. Popov, dans le numéro 68 de ces Publications (O jednoj diferencijalnoj jednačini) a donné la solution générale de l'équation

$$\sum_0^n {}_k \binom{\omega}{k} P_n^{(k)}(x)\, D_x^{n-k} y=0 \tag{2}$$

où $P_n(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$.

Dans cette note nous donnons la solution de l'équation (1) par un développement plus simple et prouvons l'équivalence des équations (1) et (2).

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n constantes quelconques mais inégales et x variable. Des différences $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$, ... , $x-\alpha_n$ formons les fonctions symétriques élémentaires $s_p\,(p=1, 2, \ldots, n)$, sommes des produits p à p des n différences,

$$s_1=(x-\alpha_1)+(x-\alpha_2)+\cdots+(x-\alpha_n),$$

$$s_2=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)+\cdots+(x-\alpha_1)(x-\alpha_n)+\cdots+(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n),$$

$$s_3 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) + \cdots + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_n) + \cdots$$
$$+ (x-\alpha_{n-2})(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n),$$
$$\vdots$$
$$s_{n-1} = (x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) + (x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) + \cdots$$
$$+ (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1}),$$
$$s_n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

Les dérivées successives de s_n par rapport à x sont

$$D_x\, s_n = 1!\, s_{n-1},$$
$$D_x^2\, s_n = 2!\, s_{n-2},$$
$$D_x^3\, s_n = 3!\, s_{n-3},$$
$$\vdots$$
$$D_x^{n-1}\, s_n = (n-1)!\, s_1,$$
$$D_x^n\, s_n = n!,$$

d'où

$$n! = P_n^{(n)}(x), \quad s_1 = \frac{1}{(n-1)!} P_n^{(n-1)}(x), \quad s_2 = \frac{1}{(n-2)!} P_n^{(n-2)}(x), \ \ldots,$$
$$s_{n-1} = \frac{1}{1!} P_n^{(1)}(x), \quad s_n = P_n(x).$$

D'autre part l'équation de racines $x-\alpha_1,\ x-\alpha_2, \ldots, x-\alpha_i, \ldots, x-\alpha_n$ détermine l'identité

$$(x-\alpha_i)^n - s_1 (x-\alpha_i)^{n-1} + s_2 (x-\alpha_i)^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1}(x-\alpha_i) + (-1)^n s_n = 0,$$

ou bien

$$\frac{1}{n!} P_n^{(n)}(x)\cdot(x-\alpha_i)^n - \frac{1}{(n-1)!} P_n^{(n-1)}(x)\cdot(x-\alpha_i)^{n-1} + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} P_n^{(1)}(x)\cdot(x-\alpha_i) + (-1)^n P_n(x) = 0.$$

En multipliant chaque terme par $n!\binom{\lambda+n}{n}(x-\alpha_i)^\lambda$, on obtient successivement

$$\sum_0^n{}_k\, n!\binom{\lambda+n}{n}(x-\alpha_i)^\lambda (-1)^k \frac{1}{(n-k)!} P_n^{(n-k)}(x)\cdot(x-\alpha_i)^{n-k} = 0,$$

$$\sum_0^n{}_k (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(\lambda+n)(\lambda+n-1)\cdots(\lambda+n-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \binom{\lambda+n-k}{n-k} P_n^{(n-k)}(x)\cdot(x-\alpha_i)^{\lambda+n-k} = 0,$$

$$\sum_0^n{}_k (-1)^k \binom{\lambda+n-k}{n-k} P_n^{(n-k)}(x)\cdot D_x^k (x-\alpha_i)^{\lambda+n} = 0.$$

De là il suit que l'équation (1) a pour intégrales particulières

$$(x-\alpha_1)^{\lambda+n}, \quad (x-\alpha_2)^{\lambda+n}, \quad \ldots \quad , \quad (x-\alpha_n)^{\lambda+n}.$$

Du fait que

$$(-1)^k \binom{\lambda+n-k}{n-k} = (-1)^k \frac{(\lambda+n-k)(\lambda+n-k-1)\cdots(\lambda+1)}{(n-k)!}$$

$$= (-1)^n \frac{(-\lambda-1)(-\lambda-2)\cdots(-\lambda-n+k)}{(n-k)!} = (-1)^n \binom{-\lambda-1}{n-k},$$

l'équation (1) prend la forme

$$\sum_0^n {}_k \binom{-\lambda-1}{n-k} P_n^{(n-k)}(x) \cdot D_x^k y = 0$$

ou bien

$$\sum_0^n {}_k \binom{-\lambda-1}{k} P_n^{(k)}(x) \cdot D_x^{n-k} y = 0.$$

laquelle est précisément du type (2).