PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 78 (1962)

SUR UNE RELATION RÉCURRENTE CONCERNANT LES NOMBRES DE STIRLING

Maurice Glaymann — Dragomir Ž. Đoković

1. Introduction

Les nombres de *Stirling* de première espèce S_n^m (n, m nombres entiers ou nuls) sont définis par

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) = \sum_{m=1}^{n} S_n^m x^m, \tag{1.1}$$

avec $$S_0^0 = 1,\ S_n^0 = 0\ (n > 0),\ S_n^m = 0\ (m > n).$$

On peut ranger ces nombres dans un tableau illimité de la forme triangulaire:

(1. 2)

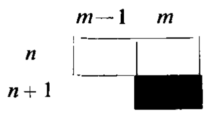
$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	. . .
0	S_0^0											
1	S_1^0	S_1^1										
2	S_2^0	S_2^1	S_2^2									
3	S_3^0	S_3^1	S_3^2	S_3^3								
4	S_4^0	S_4^1	S_4^2	S_4^3	S_4^4							
5	S_5^0	S_5^1	S_5^2	S_5^3	S_5^4	S_5^5						
6	S_6^0	S_6^1	S_6^2	S_6^3	S_6^4	S_6^5	S_6^6					
7	S_7^0	S_7^1	S_7^2	S_7^3	S_7^4	S_7^5	S_7^6	S_7^7				
8	S_8^0	S_8^1	S_8^2	S_8^3	S_8^4	S_8^5	S_8^6	S_8^7	S_8^8			
9	S_9^0	S_9^1	S_9^2	S_9^3	S_9^4	S_9^5	S_9^6	S_9^7	S_9^8	S_9^9		
10	S_{10}^0	S_{10}^1	S_{10}^2	S_{10}^3	S_{10}^4	S_{10}^5	S_{10}^6	S_{10}^7	S_{10}^8	S_{10}^9	S_{10}^{10}	
⋮												

Ces nombres vérifient plusieurs relations récurrentes, la principale étant

$$S^m_{n+1} = S^{m-1}_n - n\, S^m_n. \tag{1. 3}$$

A cette relation on peut associer le schéma suivant

(S 1)



Le carré noir correspond aux indices du nombre S^m_{n+1} qui se trouve au premier membre de (1. 3) et les deux carrés blancs correspondent aux indices des deux autres nombres de *Stirling* S^{m-1}_n et S^m_n qui figurent au deuxième membre de la relation (1. 3).

Dans le livre de *Ch. Jordan* [1], on trouve les quatre relations récurrentes suivantes:

$$S^m_{n-1} + S^{m-1}_{n-1} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} S^k_n, \tag{1. 4}$$

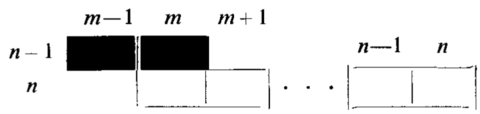
$$S^m_n = \sum_{k=m-1}^{n-1} (-1)^{m+k+1} \binom{k}{m-1} S^k_{n-1}, \tag{1. 5}$$

$$S^m_{n-1} = \sum_{k=m+1}^{n} (-1)^{m+k+1} \binom{k-1}{m} S^k_n, \tag{1. 6}$$

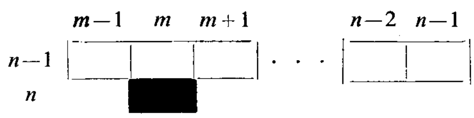
$$n S^m_n = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{m+k} \binom{k}{m-1} S^k_n, \tag{1. 7}$$

dont les schémas sont respectivement

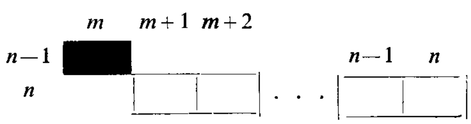
(S 2)



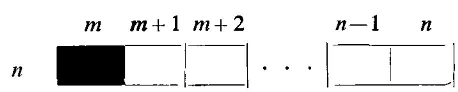
(S 3)



(S 4)



(S 5)



Les nombres $S_0^0, S_1^1, S_2^2, \ldots$ situés sur la diagonale principale du tableau (1. 2) sont égaux à un.

Les nombres de *Stirling* situés sur la deuxième diagonale du même tableau sont donnés par la formule

$$S_n^{n-1} = -\binom{n}{2}. \tag{1. 8}$$

Aux nombres de *Stirling* situés sur les quatre diagonales suivantes correspondent les formules:

$$\begin{aligned}
S_n^{n-2} &= \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-1),\\
S_n^{n-3} &= -\frac{1}{2}\binom{n}{4}n(n-1),\\
S_n^{n-4} &= \frac{1}{48}\binom{n}{5}(15n^3-30n^2+5n+2),\\
S_n^{n-5} &= -\frac{1}{16}\binom{n}{6}n(n-1)(3n^2-7n-2).
\end{aligned} \tag{1. 9}$$

Pour la démonstration de ces formules, voir les articles [2] et [3].

2. Relation récurrente

Nous allons établir une relation récurrente entre les éléments d'une même colonne du tableau (1. 2).

Par application de la formule (1. 3), on obtient:

$$\begin{aligned}
S_n^m &= S_{n-1}^{m-1} - (n-1)\, S_{n-1}^m,\\
S_{n-1}^m &= S_{n-2}^{m-1} - (n-2)\, S_{n-2}^m,\\
S_{n-2}^m &= S_{n-3}^{m-1} - (n-3)\, S_{n-3}^m,\\
S_{n-3}^m &= S_{n-4}^{m-1} - (n-4)\, S_{n-4}^m,\\
&\vdots\\
S_{m+1}^m &= S_m^{m-1} - m\, S_m^m,\\
S_m^m &= S_{m-1}^{m-1}.
\end{aligned}$$

Multiplions la première de ces égalités par 1, la deuxième par $-(n-1)$, la troisième par $(n-1)\,(n-2)$, la quatrième par $-(n-1)\,(n-2)\,(n-3), \ldots$, la $(n-m)$-ième par $(-1)^{n-m-1}\,(n-1)\,(n-2)\cdots(m+1)$ et la dernière par $(-1)^{n-m}\,(n-1)\,(n-2)\cdots(m+1)\,m$.

Pai addition, il vient

$$S_n^m = \sum_{k=1}^{n-m+1} (-1)^{k-1}(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\, S_{n-k}^{m-1}$$

ou encore

(2. 1) $$S_n^m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-m+1} (-1)^{k-1} k! \binom{n}{k} S_{n-k}^{m-1}.$$

D'autre part, considérons la fonction

(2. 2) $$f(x, y) = y^x$$

de deux variables réelles x et y $(y>0)$.

En partant de la relation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n}{\partial y^n} f\right) = \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) \quad (n \text{ entier}),$$

il vient pour $f(x, y) = y^x$

$$\frac{\partial}{\partial x}[(x)_n\, y^{x-n}] = \frac{\partial^n}{\partial y^n}(y^x \log y).$$

En utilisant la formule de *Leibniz,* on a

$$\left[\frac{d}{dx}(x)_n + (x)_n \log y\right] y^{x-n} = \left[(x)_n \log y + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(k-1)! \binom{n}{k} (x)_{n-k}\right] y^{x-n}$$

d'où, après simplification,

(2. 3) $$\frac{d}{dx}(x)_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(k-1)! \binom{n}{k} (x)_{n-k}.$$

D'après la relation (1. 1), il vient

(2. 4) $$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} S_n^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(k-1)! \binom{n}{k} \sum_{r=1}^{n-k} x^r S_{n-k}^r.$$

Après identification des coefficients de x^{n-p} dans l'identité (2. 4), il vient

$$S_n^{n-p+1} = \frac{1}{n-p+1} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1}(k-1)! \binom{n}{k} S_{n-k}^{n-p}.$$

En posant $m = n-p+1$, on obtient la formule

(2. 5) $$S_n^m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n-m+1} (-1)^{k-1}(k-1)! \binom{n}{k} S_{n-k}^{m-1} \quad (m<n).$$

En égalant les seconds membres des identités (2. 1) et (2. 5), on obtient

(2. 6) $$\sum_{k=1}^{n-m+1} (-1)^{k-1}(mk-n) \binom{n}{k} (k-1)!\, S_{n-k}^{m-1} = 0$$

ou, en remplaçant m et n respectivement par $m+1$ et $n+1$,

$$\sum_{k=1}^{n-m+1} (-1)^{k-1} [(m+1)k-n-1] \binom{n+1}{k} (k-1)!\ S_{n-k+1}^{m} = 0.$$

Si l'on pose $k=n-m-r+1$, on obtient la formule suivante

$$\sum_{r=0}^{n-m} (-1)^{r} [(m+1)(n-m-r+1)-n-1] \binom{n+1}{m+r} (n-m-r)!\ \ S_{m+r}^{m} = 0.$$

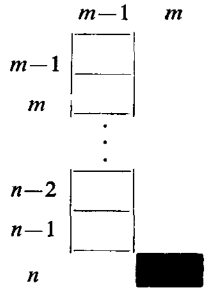
En résolvant cette équation par rapport à S_n^m, on obtient

$$(2.\ 7)\quad (-1)^{n-m}(n-m)\, S_n^m = \sum_{k=0}^{n-m-1} (-1)^k \frac{m(n-m-k)-k}{n-m-k+1} (n)_{n-m-k}\, S_{m+k}^m .$$

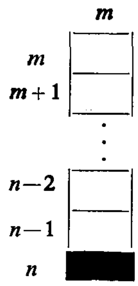
C'est la relation que nous nous proposions d'obtenir.

Les formules récurrentes (2. 1) et (2. 5) ont le même schéma (S 6) et la formule (2. 7) le schéma (S 7):

(S 6)



(S 7)



3. Remarques

La formule (2. 6) peut être employée pour la vérification des tables de nombres de *Stirling*.

On peut aussi appliquer la formule (2. 7) pour l'évaluation de certains nombres particuliers S_n^m pour lesquels la différence $n-m$ est relativement petite. Dans le même but on peut utiliser la formule (1. 7).

RÉFÉRENCES

[1] Ch. Jordan: *Calculus of Finite Differences*, second edition, New York 1950.

[2] D. S. Mitrinović: *Sur les nombres de Stirling de première espèce et les polynômes de Stirling*, Publications de la Faculté d'électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, №. 23, 1959.

[3] D. S. Mitrinović — R. S. Mitrinović: *Sur les nombres de Stirling et les nombres de Bernoulli d'ordre supérieur.* Publications de la Faculté d'électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, №. 43, 1960.