PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 72 (1962)

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $f(x_3, x_1+x_2)-f(x_1, x_2+x_3)+f(x_2, x_1)-f(x_2, x_3)=0$

Dragomir Ž. Đoković

(Reçu le 15 février 1962)

C'est un complément à l'article: *Sur quelques équations fonctionnelles*, par *D. S. Mitrinović* et *D. Ž. Đoković*, qui paraîtra dans les Publications de l'Institut mathématique de Belgrade, nouvelle série, t. 1, 1961.

Dans l'article cité, on a trouvé la solution générale de douze équations fonctionnelles obtenues par le changement des arguments u et v de $f(u, v)$ dans l'équation suivante

$$f(x_1+x_2, x_3)-f(x_1, x_2+x_3)+f(x_1, x_2)-f(x_2, x_3)=0.$$

Il est question ici des deux équations:

$$f(x_3, x_1+x_2)-f(x_1, x_2+x_3)+f(x_2, x_1)-f(x_2, x_3)=0, \tag{1}$$

$$f(x_1+x_2, x_3)-f(x_2+x_3, x_1)+f(x_1, x_2)-f(x_3, x_2)=0, \tag{2}$$

qui ne sont pas complètement résolues dans ledit article.

Si dans (2) l'on pose $f(x, y)=g(y, x)$, on trouve que la fonction $g(x, y)$ satisfait à l'équation (1). Donc, il suffit de ne considérer que l'équation (1).

Théorème 1. — *Toute solution de l'équation fonctionnelle* (1) *est donnée par la fonction*

$$f(x, y)=F(x+y)-F(x)-F(y)+2c(x)+c(y), \tag{3}$$

où $F(x)$ *désigne une fonction arbitraire et* $c(x)$ *une solution quelconque de l'équation de Cauchy* $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Démonstration. — En posant $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=0$, l'équation (1) fournit la relation suivante:

$$f(x, y)-f(y, x)=f(0, x+y)-f(y, 0). \tag{4}$$

Si dans (1) l'on pose $x_1=x$, $x_2=0$, $x_3=y$, on obtient

$$f(x, y)-f(y, x)=f(0, x)-f(0, y). \tag{5}$$

En comparant les égalités (4) et (5), il vient

$$f(0, x+y)-f(y, 0)=f(0, x)-f(0, y),$$

ou bien

$$f(0, x+y)-f(0, x)-f(0, y)=f(y, 0)-2f(0, y). \tag{6}$$

La fonction figurant au premier membre de (6) est symétrique. On en conclut que la fonction figurant au second membre de (6) se ramène à une constante, c'est-à-dire

$$f(y, 0)-2f(0, y)=-f(0, 0). \tag{7}$$

D'après (7), l'équation (6) se réduit à

$$f(0, x+y)-f(0, x)-f(0, y)+f(0, 0)=0.$$

Donc, on a

$$f(0, x)=f(0, 0)+c(x), \tag{8}$$

où $c(x)$ est une solution de l'équation de *Cauchy* $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

La relation (5) donne

$$f(x, y)+f(0, y)=f(y, x)+f(0, x),$$

ou bien

$$f(x, y)+c(y)=f(y, x)+c(x).$$

Il s'ensuit

$$f(x, y)-\{2c(x)+c(y)\}=f(y, x)-\{2c(y)+c(x)\}.$$

La fonction

$$h(x, y)=f(x, y)-\{2c(x)+c(y)\} \tag{9}$$

est, donc, symétrique.

Si dans (1) l'on pose $f(x, y)=h(x, y)+2c(x)+c(y)$, on obtient

$$h(x_3, x_1+x_2)+2c(x_3)+c(x_1+x_2)-h(x_1, x_2+x_3)-2c(x_1)-c(x_2+x_3)$$
$$+h(x_2, x_1)+2c(x_2)+c(x_1)-h(x_2, x_3)-2c(x_2)-c(x_3)=0,$$

ou bien

$$h(x_3, x_1+x_2)-h(x_1, x_2+x_3)+h(x_2, x_1)-h(x_2, x_3)=0.$$

Ainsi, la fonction $h(x, y)$ est symétrique et satisfait à l'équation (1); donc, d'après un résultat de *J. Erdös*, elle a la forme suivante:

$$h(x, y)=F(x+y)-F(x)-F(y). \tag{10}$$

Si l'on part de (9) et (10), on obtient la formule (3).

On vérifie aisément que chaque fonction de la forme (3) satisfait à l'équation (1).

La démonstration est ainsi achevée.

Corollaire. — La solution continue générale de l'équation (1) est donnée par

$$f(x, y)=F(x+y)-F(x)-F(y)+a(2x+y),$$

où $F(x)$ désigne une fonction continue quelconque et a une constante arbitraire.