PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA – SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 65 (1961)

SUR LES NOMBRES TRIANGULAIRES CARRÉS*

W. Sierpiński

(Reçu le 12 mai 1961)

On appelle *triangulaires* les nombres de la forme $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$, avec $n = 1, 2, \ldots$ On a donc $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 6$, $t_4 = 10$, $t_5 = 15$. On a $t_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Parmi les nombres triangulaires il y a des nombres carrés, par exemple $t_1 = 1^2$, $t_8 = 6^2$, $t_{49} = 35^2$.

Nous démontrerons que si $t_x = y^2$ est un nombre triangulaire carré, alors le plus petit nombre triangulaire carré qui est plus grand que t_x est $t_{3x+4y+1}$.

Soit donc $t_x = y^2$, où x et y sont des nombres naturels. On a

$$t_{3x+4y+1} = \frac{(3x+4y+1)(3x+4y+2)}{2} = 9\,t_x + 8\,y^2 + 2\,(6\,x+3)\,y + 1,$$

et, comme $t_x = y^2$, on trouve $9\,t_x = y^2 + 8\,t_x = y^2 + 4\,x(x+1)$ donc

$$t_{3x+4y+1} = 9\,y^2 + 2.3.\,(2\,x+1)\,y + (2\,x+1)^2 = (2\,x + 3\,y + 1)^2,$$

ce qui prouve que le nombre triangulaire $t_{3x+4y+1}$ est carré.

Donc, ayant un nombre triangulaire carré $t_x = y^2$, nous savons déterminer un nombre triangulaire plus grand, $t_{3x+4y+1}$.

En partant du nombre triangulaire carré $t_1 = 1^2$, nous obtenons ainsi une suite infinie croissante de nombres triangulaires carrés

(1) $\qquad t_1 = 1,\ t_8 = 6^2,\ t_{49} = 35^2,\ t_{288} = 204^2,\ t_{1681} = 1189^2,\ t_{9800} = 6930^2, \ldots$

Nous démontrerons maintenant que cette suite infinie contient tous les nombres triangulaires carrés.

---

* C'est la conference que Monsieur le Professeur W. Sierpiński (Varsovie) a tenue à l'Université de Zagreb, le 6 mai 1961.

Dans le *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège* (t. 30, 1961, p. 189-194) a paru récemment un article dû à même auteur sous le même titre. Cependant, cette nouvelle version de l'article mentionné apporte de nouveaux résultats sur les nombres triangulaires carrés (*Comité de la Rédaction des Publications*).

Admettons donc qu'il existe un nombre triangulaire carré qui n'est pas contenu dans cette suite et soit $t_u = v^2$ le plus petit de tels nombres.

Soit

(2) $$x = 3u - 4v + 1, \quad y = 3v - 2u - 1.$$

Nous prouverons que les nombres x et y sont des entiers positifs, $x < u$ et $t_x = y^2$.

Comme $t_u = v^2$, donc $\frac{u(u+1)}{2} = v^2$, on a $u^2 < 2v^2$ et $u < v\sqrt{2}$, d'où

$$2u < 2\sqrt{2}\,v < 3v = 4v - v \leqslant 4v - 1,$$

donc $2u < 4v - 1$ et $x = 3u - 4v + 1 = u + 2u - (4v - 1) < u$, donc $x < u$.

Comme $v = \sqrt{\frac{u(u+1)}{2}}$, s'il était $x \leqslant 0$, on aurait, d'apres (2),

$$3u - 4\sqrt{\frac{u(u+1)}{2}} + 1 \leqslant 0,$$

d'où $(3u+1)^2 \leqslant 8u(u+1)$, donc $u^2 + 1 \leqslant 2u$ et $(u-1)^2 \leqslant 0$, ce qui donne $u = 1$, contrairement à l'hypothèse que $u > 1$.

S'il était $y \leqslant 0$, on aurait, d'après (2), $3\sqrt{\frac{u(u+1)}{2}} - 2u - 1 \leqslant 0$, donc $9u(u+1) \leqslant 2(2u+1)^2$, d'où $u^2 + u \leqslant 2$, ce qui est impossible, vu que $u > 1$. Donc, y est un nombre naturel.

Or, on a

$$t_x = t_{3u-4v+1} = \frac{(3u-4v+1)(3u-4v+2)}{2} = 9\frac{u^2+u}{2} - 12uv + 8v^2 - 6v + 1$$

et, comme $t_u = v^2$, donc $9\frac{u^2+u}{2} = 9t_u = v^2 + 4u(u+1)$, on trouve

$$t_x = 9v^2 + 4u^2 + 4u - 12uv - 6v + 1 = (3v - 2u - 1)^2 = y^2.$$

Vu la définition du nombre u, comme $x < u$, t_x est un terme de la suite (1), donc aussi $t_{3x+4y+1}$ est un terme de cette suite. Or, il résulte de (2) que $3x + 4y + 1 = u$: le nombre t_u serait donc un terme de la suite (1), contrairement à l'hypothèse.

Nous avons ainsi démontré que la suite (1) contient tous les nombres triangulaires carrés. Il en résulte que si $t_x = y^2$ est un nombre triangulaire carré, alors le plus petit nombre triangulaire carré plus grand que t_x est $t_{3x+4y+1}$.

Il résulte tout de suite de l'identité

$$(2x + 2y + 1)^2 - (x + 2y)^2 - (x + 2y + 1)^2 = 4\left(\frac{x^2+x}{2} - y^2\right)$$

que si $t_x = y^2$, on a

(3) $$(2x + 2y + 1)^2 = (x + 2y)^2 + (x + 2y + 1)^2$$

et inversement.

Il en résulte que les nombres triangulaires carrés donnent toutes les solutions de l'équation (3) en nombres naturels x et y. Chaque solution de l'équation (3) en nombres naturels x et y donne un triangle rectangulaire dont les deux côtés sont des nombres naturels consécutifs. Or, si l'on a un tel triangle rectangulaire, dont les côtés sont a et $a+1$ (ou a est un nombre naturel) et l'hypoténuse naturelle c, on a $c^2=a^2+(a+1)^2$, d'où il résulte que c est un nombre naturel impair. Or, comme $(a+1)^2<c^2=2a^2+2a+1<(2a+1)^2$, on a $a+1<c<2a+1$ et les nombres $x=c-a-1$ et $y=a-\frac{c-1}{2}$ sont naturels et on a $a=x+2y$ et $c=2x+2y+1$, d'où on trouve l'égalité (3). Il s'en suit qu'en partant des nombres triangulaires carrés $t_x=y^2$, on obtient, à l'aide de la formule (3), tous les triangles rectangulaires aux côtés naturels dont les deux côtés sont des nombres naturels consécutifs.

Ainsi la solution $t_1=1^2$ nous donne $5^2=3^2+4^2$, $t_8=6^2$ donne $29^2=20^2+21^2$, $t_{49}=35^2$ donne $169^2=119^2+120^2$.

Il est a remarquer que déjà *Euler* savait que pour n naturels les nombres $\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$ sont naturels et leurs carrés sont des nombres tringulaires. Il savait donc qu'il existe une infinité des nombres triangulaires carrés.

Désignons par $t_{x_n}=y_n^2$ le n-ième terme de la suite (1). Comme l'a remarqué D. Blanuša, on a les formules

$$(*)\qquad x_n=\left[\frac{(\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n}{2}\right]^2,\qquad y_n=\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}.$$

En effet, ces formules sont évidemment vraies pour $n=1$. Supposons qu'elles sont vraies pour un nombre naturel n. Comme nous avons démontré plus haut, on aura $x_{n+1}=3x_n+4y_n+1$, donc, d'après $(*)$, vu que $3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2$, on vérifie sans peine que

$$x_{n+1}=3\left[\frac{(\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n}{2}\right]^2+\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n}-(\sqrt{2}-1)^{2n}}{2}+1=\left[\frac{(\sqrt{2}+1)^{n+1}-(\sqrt{2}-1)^{n+1}}{2}\right]^2.$$

On en trouve sans peine

$$x_{n+1}+1=\left[\frac{(\sqrt{2}+1)^{n+1}-(\sqrt{2}-1)^{n+1}}{2}\right]+1=\left[\frac{(\sqrt{2}+1)^{n+1}+(\sqrt{2}-1)^{n+1}}{2}\right]^2,$$

donc

$$t_{x_{n+1}}=\frac{x_{n+1}(x_{n+1}+1)}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n+2}-(\sqrt{2}-1)^{2n+2}}{4}\right]^2$$

$$=\left[\frac{(3+2\sqrt{2})^{n+1}-(3-2\sqrt{2})^{n+1}}{4\sqrt{2}}\right]^2$$

et comme $t_{x_{n+1}}=y_{n+1}^2$, on en trouve $y_{n+1}=\frac{(3+2\sqrt{2})^{n+1}-(3-2\sqrt{2})^{n+1}}{4\sqrt{2}}$.

Les formules $(*)$ sont donc vraies pour le nombre $n+1$, et il s'en suit par l'induction qu'elles sont vraies pour $n=1, 2, \ldots$, c. q. f. d. Il en résulte que les formules d'Euler donnent (pour $n=1, 2, \ldots$) tous les nombres triangulaires carrés.

D. Blanuša a démontré aussi que pour n pairs, les nombres $\frac{x_n}{2}$ et x_n+1 sont des carrés et pour n impairs les nombres x_n et $\frac{x_n+1}{2}$ sont des carrés.

K. Zarankiewicz a posé le problème d'existence d'un triangle rectangulaire dont chacun des côtés soit un nombre triangulaire. On connaît un tel triangle dont les côtés sont $t_{132}=8778$, $t_{143}=10296$ et $t_{164}=13530$, mais on ne sait pas si l'en existe d'utres et si leur nombre est fini. Or, on peut démontrer qu'*il existe une infinité de triangles rectangulaires dont les deux côtés sont des nombres triangulaires et l'hypoténuse est un entier.* Nous démontrerons même le théorème suivant:

Théorème. *Il existe une infinité de triangles rectangulaires dont les deux côtés sont des nombres triangulaires successifs et l'hypoténuse est un entier.*

Démonstration. L'égalité

$$t_{2u}^2+t_{2u+1}^2=[(2u+1)v)]^2 \tag{4}$$

équivaut à l'égalité

$$u^2+(u+1)^2=v^2. \tag{5}$$

En effet, on peut écrire l'égalité (4) sous la forme

$$u^2(2u+1)^2+(2u+1)^2(u+1)^2=(2u+1)^2v^2$$

et en divisant par $(2u+1)^2$ on trouve l'égalité (5).

Inversement, en multipliant l'égalité (5) par $(2u+1)^2$ on trouve l'égalité (4).

Or, comme nous avons démontré plus haut, l'équation (5) admet une infinité de solutions en nombres naturels u et v. Le même est donc de l'équation (4), et notre théorème se trouve démontré.

Par exemple de $3^2+4^2=5^2$, $20^2+21^2=29^2$, $119^2+120^2=169^2$, on trouve:

$$t_6^2+t_7^2=(7.5)^2, \quad t_{40}^2+t_{41}^2=(41.29)^2, \quad t_{238}^2+t_{239}^2=(239.169)^2.$$

On pourrait démontrer que cette méthode fournit toutes les solutions de l'équation $t_{2u}^2+t_{2u+1}^2=w^2$ en nombres naturels u et w.

Or, il existe d'autres triangles rectangulaires dont les côtés sont des nombres triangulaires et l'hypoténuse est un entier: le plus petit d'entre eux est le triangle aux côtés t_5, t_8 et 39. On a aussi $t_7^2+t_9^2=53^2$.

Remarque. Pour les références *voir* notre article paru sous le même titre dans le *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, t. 30, № 5—6, 1961, p. 189—194.