PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA - SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 64 (1961)

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $f(x)=f[g(x)]$

Slaviša Prešić

(Reçu le 7 mai 1961)

Soit g une fonction qui applique l'ensemble non-vide S_1 sur lui-même d'une manière biunivoque, de sorte que sa fonction inverse g^{-1} est univoquement définie sur S_1. Soit ensuite S_2 un ensemble non-vide et f une fonction définie sur S_1 et telle que $f(S_1)\subset S_2$. Nous allons chercher, dans l'ensemble de telles fonctions f, la solution générale de l'équation

$$f(x)=f[g(x)], \tag{1}$$

supposant S_1, S_2 et g donnés.

Désignons par M une application de l'ensemble $P(S_2)$ dans l'ensemble S_2 avec la propriété que pour tout $y\in S_2$ on a $M\{y\}=y$. Il existe, d'après l'axiome du choix de Zermelo, au moins une telle application. Posons encore $g^{\circ}(x)=x$, $g^{n+1}(x)=g[g^n(x)]$, $g^{-n}(x)=g^{-1}[g^{-n+1}(x)]$ $(n=1, 2, \ldots)$ pour tout $x\in S_1$.

On peut démontrer le théorème suivant:

Théorème. La solution générale de l'équation (1) est

$$f(x)=M\bigcup_{\nu=-\infty}^{+\infty}\{\Pi[g^{\nu}(x)]\}, \tag{2}$$

où Π désigne une fonction arbitraire définie sur S_1 et telle que $\Pi(S_1)\subset S_2$.

Démonstration. Soit Π une fonction quelconque définie sur S_1 et telle que $\Pi(S_1)\subset S_2$. Pour tout $x\in S_1$ on a

$$\bigcup_{\nu=-\infty}^{+\infty}\{\Pi[g^{\nu}(x)]\}\subset S_2.$$

La fonction f définie par (2) possède alors la propriété

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= M\bigcup_{\nu=-\infty}^{+\infty}\{\Pi[g^{\nu}(g(x))]\}=M\bigcup_{\nu=-\infty}^{+\infty}\{\Pi[g^{\nu+1}(x)]\} \\ &= M\bigcup_{\nu=-\infty}^{+\infty}\{\Pi[g^{\nu}(x)]\}=f(x), \end{aligned}$$

pour tout $x\in S_1$, c'est-à-dire elle satisfait à l'équation (1).

Démontrons encore que toute solution de l'équation (1) on peut écrire sous la forme (2). Soit f une solution de (1). Si nous posons $\Pi(x)=f(x)$ $(x \in S_1)$, on a $\Pi[g^\nu(x)]=f[g^\nu(x)]=f(x)$ $(x \in S_1,\ -\infty<\nu<+\infty)$ de sorte que

$$M \bigcup_{\nu=-\infty}^{+\infty} \{\Pi[g^\nu(x)]\}=M \bigcup_{\nu=-\infty}^{+\infty} \{f(x)\}=M\{f(x)\}=f(x) \quad (x \in S_1).$$

Le théorème est ainsi complètement démontré.

Pour illustrer le théorème en question, nous donnons quelques exemples.

Exemple 1. Cherchons la solution générale de l'équation

$$f(x, y)=f(a_{11} x+a_{12} y,\ a_{21} x+a_{22} y), \tag{3}$$

où $\|a_{ij}\|^k=E$ pour un nombre naturel k et où x, y, a_{ij} $(i, j=1, 2)$ sont des nombres réels et f une fonction réelle.

En désignant les matrices

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

par X et A respectivement, on peut écrire l'équation (3) sous la forme suivante:

$$F(X)=F(AX), \tag{4}$$

où $F(X)$ est une fonction réelle de la matrice variable X. Dans ce cas, la fonction $g(X)$ est donnée par l'équation $g(X)=AX$. En vertu de l'hypothèse $A^k=E$, nous avons

$$g^{-1}(X)=A^{k-1} X \quad \text{et} \quad g^k(X)=X.$$

Définissons l'application M comme suit:

$$M\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}=\frac{1}{k}(a_1+a_2+\cdots+a_k), \quad M\{a_1\}=a_1,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ nombres réels arbitraires, $M(T)=0$, pour tout autre $T \in P(S_2)$.

D'après le théorème démontré plus haut la solution générale de l'équation (4) est

$$F(X)=M \bigcup_{\nu=-\infty}^{+\infty} \{\Pi(A^\nu X)\}=M \bigcup_{\nu=0}^{k-1} \{\Pi(A^\nu X)\}=\frac{1}{k} \sum_{\nu=0}^{k-1} \Pi(A^\nu X),$$

où Π désigne une fonction réelle de X arbitrairement choisie. On en déduit que l'équation (3) possède la solution générale de la forme

$$f(x, y)=\frac{1}{k} \sum_{\nu=0}^{k-1} \Pi({}^\nu a_{11} x+{}^\nu a_{12} y,\ {}^\nu a_{21} x+{}^\nu a_{22} y), \tag{5}$$

avec $\|{}^\nu a_{ij}\|=\|a_{ij}\|^\nu$, et Π une fonction réelle, de deux variables réelles, arbitraires.

Nous citons deux cas particuliers de l'équation (3) que voici

$$f(x, y)=f(y, x), \tag{6}$$

$$f(x, y)=f\left(-\frac{1}{2} x+\frac{1}{2} y,\ -\frac{3}{2} x-\frac{1}{2} y\right), \tag{7}$$

dont les solutions générales sont respectivement:

$$f(x, y)=\frac{1}{2}\,[\Pi(x, y)+\Pi(y, x)],$$

$$f(x, y)=\frac{1}{3}\left\{\Pi(x, y)+\Pi\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y,\ -\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y\right)\right.$$
$$\left.+\Pi\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y,\ -\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y\right)\right\}.$$

Exemple 2. L'équation (3) est un cas spécial de l'équation

$$(8)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_s)=f(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s,\ \ldots,\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{ss}x_s),$$

où a_{ij} sont des constantes réelles et f une fonction réelle dépendant de s variables indépendantes réelles x_i.

Pour le cas où $\|a_{ij}\|^k=E$, on peut écrire la solution générale de (8) sous la forme qui généralise celle donnée par (5). Laissons ce cas à part.

Dans le cas général, définissons l'application M de la manière suivante: si S est un ensemble de nombres réels supérieurement borné, MS désigne sa borne supérieure; en cas contraire, on pose $MS=0$.

L'application M satisfait aux conditions correspondantes. D'après le théorème énoncé, on en conclut que la solution générale de (8) a la forme suivante:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s)=M\bigcup_{\nu=-\infty}^{+\infty}\{\Pi({}^{\nu}a_{11}x_1+{}^{\nu}a_{12}x_2+\cdots+{}^{\nu}a_{1s}x_s,\ \ldots,\ {}^{\nu}a_{s1}x_1$$
$$+{}^{\nu}a_{s2}x_2+\cdots+{}^{\nu}a_{ss}x_s)\},$$

où Π est une fonction réelle arbitraire des arguments x_i $(i=1, 2, \ldots, s)$, et $\|{}^{\nu}a_{ij}\|=\|a_{ij}\|^{\nu}$.

Exemple 3. Soit $(G,\cdot)$ un groupe d'ordre g et a et b deux éléments de ce groupe. Cherchons dans ce groupe toutes les opérations binaires $*$ possédant la propriété

$$(9)\qquad x*y=(a\cdot x)*(b\cdot y)\ \text{pour tout}\ x, y\in G.$$

Si nous posons $x*y=f(x, y)$, l'égalité (9) devient $f(x, y)=f(a\cdot x,\ b\cdot y)$.

Nous pouvons définir l'application Π comme suit: désignons les éléments de G par $a_1, a_2, \ldots, a_g$ et introduisons la relation $\geqslant$ par la convention: $a_i\geqslant a_j$ si et seulement si $i\geqslant j$. Posons ensuite

$$\underset{i_1, i_2, \ldots i_s\leqslant g}{M}\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{is}\}=\operatorname{Max}\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{is}\},$$

où le maximum correspond à l'ordre déterminé par la relation $\geqslant$ introduite.

On peut démontrer, à l'aide du théorème cité ci-dessus, que la forme générale de l'opération $*$, satisfaisant à l'equation (9), est la suivante

$$(10)\qquad x*y=\operatorname{Max}\{(a\cdot x)\circ(b\cdot y),\ (a^2\cdot x)\circ(b^2\cdot y)\ \ldots,\ (a^g\cdot x)\circ(b^g\cdot y)\},$$

où $\circ$ désigne une opération binaire arbitraire dans G.