PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 62 (1961)

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES BILINÉAIRES À PLUSIEURS FONCTIONS INCONNUES

J. Aczél

(Reçu le 14 mai 1961)

1. Dans le Numéro 5 de ces Publications *D. S. Mitrinović* **[6]** a déterminé les solutions continues et dérivables de l'équation fonctionnelle

(1) $$f(x)+g(y)=h(x)k(y)$$

(*cf.* aussi **[4]**). Depuis, l'auteur de la présente note a déterminé toutes les solutions de (1) sans supposer aucune condition de régularité sur les fonctions f, g, h, k figurant dans (1) (**[7]** et **[9]**).

O. E. Gheorghiu a examiné dans le Numéro 37 de ces Publications **[8]** deux équations de la forme

(2) $$f(x)+g(y)=h(x)\,k(y)+p(x)\,q(y)$$

du même point du vue.

Dans cette note-ci nous donnons la solution générale de l'équation fonctionnelle

(3) $$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,g_k(y)=0$$

contenant aussi (1) et (2) comme cas particuliers. Cette équation était déjà considérée par *O. Suto* **[2]** sous conditions de différentiabilité, mais *nous ne poserons aucune condition de régularité sur les fonctions* f_k, g_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ figurant dans (3) (*cf.* aussi **[10]**). On peut même considérer f_k et g_k comme *définies sur des ensembles quelconques et ayant des valeurs dans un corps algébrique quelconque.*

Nous finirons en indiquant encore une application.

2. Commençons par le cas le plus simple $n=2$ de (3), à savoir

(4) $$f_1(x)\,g_1(y)+f_2(x)\,g_2(y)=0$$

(c'est cette équation qu'on résout souvent dans la théorie d'équations différentielles de la physique mathématique par la „méthode de séparation de variables", *cf.* **[10]**).

Si $g_2(y)\equiv 0$, alors ou $f_1(x)\equiv 0$ et $g_1(y)$ est arbitraire, ou bien $g_1(y)\equiv 0$ et alors $f_1(x)$ est arbitraire.

Si d'autre part $g_2(y)\not\equiv 0$, il existe alors un $y=y_0$ dans l'ensemble considéré tel que $g_2(y_0)\neq 0$. Substituons ce y_0 pour y dans (4) et divisons par $g_2(y_0)$, il vient

$$f_2(x) = -\frac{g_1(y_0)}{g_2(y_0)} f_1(x) = Cf_1(x) \quad (C=\text{const}).$$

En résubstituant cela en (4), nous obtenons

$$f_1(x)\,[g_1(y)+Cg_2(y)]=0,$$

donc ou $f_1(x)\equiv 0$, ce qui entraîne la relation $f_2(x)\equiv 0$, ou $g_1(y)+Cg_2(y)\equiv 0$, c'est-à-dire $g_1(y) = -Cg_2(y)$.

Ainsi *la totalité des solutions de* (4) *est donnée par le tableau suivant:*

(5)

	I	II	III	IV
f_1	f_1	0	f_1	0
f_2	f_2	f_2	Cf_1	0
g_1	0	g_1	$-Cg_2$	g_1
g_2	0	0	g_2	g_2

(La „méthode de séparation de variables" mentionné ci-dessus n'en donne que la colonne III).

3. *On peut réduire toute équation de la forme* (3) *succésivement à une équation de la forme* (4). Pour prouver cela, il suffit de montrer comment on peut réduire

$$\sum_{k=1}^{n+1} f_k(x)\, g_k(y) = 0 \tag{6}$$

à une équation de la forme (3).

Si $g_{n+1}(y)\equiv 0$, alors (6) est déjà de la forme (3), et f_{n+1} est arbitraire.

Si $g_{n+1}(y)\not\equiv 0$, il existe alors un $y=y_0$ tel que $g_{n+1}(y_0)\neq 0$. Nous substituons cette valeur au lieu de y dans (6) et divisons par $g_{n+1}(y_0)$:

$$f_{n+1}(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{g_k(y_0)}{g_{n+1}(y_0)} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k f_k(x) \tag{7}$$

(les C_k ($k=1, 2, \ldots, n$) étant des constantes) ce qui donne en résubstituant dans (6)

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,[g_k(y) + C_k\, g_{n+1}(y)] = 0, \tag{8}$$

ce qui est déjà une équation de la forme (3), *c. q. f. d.* — Naturellement, on peut effectuer cette réduction aussi en substituant un élément fixé

$$x_0 \quad (f_{n+1}(x_0)\neq 0),$$

au lieu de x en (6).

4. À titre d'exemple résolvons l'équation (2) (l'équation (1) était en effet déjà résolue dans [7] et [9] par cette méthode):

(2) $$f(x)+g(y)=h(x)k(y)+p(x)q(y),$$

$y=y_0$:

(9) $$f(x)=ah(x)+bp(x)+c,$$

résubstitution en (2):

(10) $$g(y)=h(x)[k(y)-a]+p(x)[q(y)-b]-c,$$

$x=x_0$:

(11) $$g(y)=A[k(y)-a]+B[q(y)-b]-c,$$

résubstitution en (10):

$$[h(x)-A][k(y)-a]+[p(x)-B][q(y)-b]=0,$$

ce qui est déjà une équation de la forme (4) avec

$$f_1(x)=h(x)-A, \quad g_1(y)=k(y)-a, \quad f_2(x)=p(x)-B, \quad g_2(y)=q(y)-b.$$

Ainsi en vertu de (5) on a — en prenant aussi (9) et (11) en considération —

(12)

	I	II	III	IV
f	af_1+bf_2 $+aA+bB+c$	bf_2+aA $+bB+c$	$(a+bC)f_1+aA$ $+bB+c$	$aA+bB+c$
h	f_1+A	A	f_1+A	A
p	f_2+B	f_2+B	Cf_1+B	B
g	$-c$	Ag_1-c	$(B-AC)g_2-c$	Ag_1+Bg_2-c
k	a	g_1+a	$-Cg_2+a$	g_1+a
q	b	b	g_2+b	g_2+b

ou dans une forme un peu plus simple (les constantes a, b, c dans II, III et IV étant différentes de celles en (12)):

(13)

	I	II	III	IV
f	$ah+bp+c$	$bp+c$	$ah+c$	c
h	h	a	h	a
p	p	p	$Ch+b$	b
g	$-c$	$ak-c$	$bq-c$	$ak+bq-c$
k	a	k	$-Cq+a$	k
q	b	b	q	q

où a, b, c, C sont des constantes arbitraires, h et p, resp. p et k, resp. h et q, resp. k et q des fonctions arbitraires, est la solution générale de l'équation fonctionnelle (2).

En appliquant (13), on peut aussi déterminer les solutions communes des deux équations

$$f(x)+g(y)=h(x)k(y)+Kp(x)q(y),$$
$$s(x)+t(y)=[h(x)-Lp(x)]q(y)+p(x)k(y),$$

de la forme (2) considérées dans [8].

5. En appliquant la méthode exposée dans **3**, on peut déterminer aussi explicitement la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, g_k(y) = 0, \tag{3}$$

ce qui généralise aux fonctions quelconques le résultat de *O. Suto* [**2**] relatif aux fonctions dérivables. Nous démontrerons en effet le théorème suivant:

Théorème 1. *Toutes les solutions de* (3) *se laissent écrire dans la forme*

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{r} a_{ki} F_i(x), \quad g_k(y) = \sum_{j=r+1}^{n} b_{kj}\, g_j(y) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{14}$$

où r est un nombre entier entre 0 et n *et* $F_1, F_2, \ldots, F_r$ *d'une part et* $G_{r+1}, G_{r+2}, \ldots, G_n$ *d'autre part sont des fonctions arbitraires mais linéairement indépendantes entre elles et* a_{ki}, b_{kj} $(k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, r;\ j = r+1, r+2, \ldots, n)$ *sont des constantes arbitraires satisfaisant aux relations*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, b_{kj} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r;\ j = r+1, r+2, \ldots, n) \tag{15}$$

et inversement, toutes les fonctions de la forme (14) *sous les conditions* (15) *satisfont à* (3).

NB. $\sum_{1}^{0} = 0$, $\sum_{n+1}^{n} = 0$ par définition. — Il n'est pas nécessaire que tous les F_i et G_j figurent effectivement dans (1) car par ex. il peut être que $a_{k_r} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Démonstration. Nous procédons par induction. Dans le cas $n = 2$ nous écrivons (5) sous la forme

(16)

	I	II-III	IV
f_1	$a_{11} F_1 + a_{12} F_2$	$a_{11} F_1$	0
f_2	$a_{21} F_1 + a_{22} F_2$	$a_{21} F_1$	0
g_1	0	$b_{12} G_2$	$b_{11} G_1 + b_{12} G_2$
g_2	0	$b_{22} G_2$	$b_{21} G_1 + b_{22} G_2$
		$(a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22} = 0)$	

ce qui est juste, car dans I resp. IV $a_{11} F_1 + a_{12} F_2$ et $a_{21} F_1 + a_{22} F_2$ resp. $b_{11} G_1 + b_{12} G_2$ et $b_{21} G_1 + b_{22} G_2$ sont en général arbitraires, cependant dans II – III ou $a_{11} = 0$ et alors $b_{22} = 0$ en vertu de $a_{11} b_{12} = -a_{21} b_{22}$ (car $a_{11} = a_{21} = 0$ est déjà compris en IV) et similairement $b_{22} = 0$ entraîne $a_{11} = 0$, ce qui est la solution II dans (5); ou bien $a_{11} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$ et alors

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{b_{12}}{b_{22}} = C \quad \text{et} \quad f_2 = a_{21} F_1 = \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11} F_1 = C f_1, \quad g_1 = b_{12} G_2 = \frac{b_{12}}{b_{22}}\, b_{22} G_2 = -C g_2$$

ce qui est la solution III de (5). D'autre part II et III de (5) sont de la forme II—III de (16). Le tableau (16) montre que le théorème à démontrer est valable pour $n = 2$.

Nous devons encore montrer que la validité du théorème pour n entraîne celle pour $n+1$. Pour cela il faut considérer l'équation (6). Comme nous avons déjà vu en **3**, il faut distinguer deux cas:

A) $g_{n+1}(y)\equiv 0$. Alors f_{n+1} est arbitraire et (3) vaut pour $f_1, f_2, \dots, f_n$, $g_1, g_2, \dots, g_n$ donc par l'hypothèse d'induction

$$f_k(x)=\sum_{i=1}^{r} a_{ki} F_i(x), \quad g_k(y)=\sum_{j=r+1}^{n} b_{kj} G_j(y) \quad (k=1, 2, \dots, n). \tag{14}$$

La fonction arbitraire f_{n+1} peut être a) linéairement dépendante ou b) linéairement indépendante de $F_1, F_2, \dots, F_n$. Dans le cas a)

$$f_{n+1}(x)=\sum_{i=1}^{r} a_{n+1,\, i} F_i(x) \tag{17}$$

et nous pouvons aussi écrire (en désignant par G_{n+1} une fonction arbitraire linéairement indépendante de $G_{r+1}, G_{r+2}, \dots, G_n$)

$$g_k(y)=\sum_{j=r+1}^{n+1} b_{kj} G_j(y) \quad (b_{k,\, n+1}=0; \quad k=1, 2, \dots, n) \tag{18}$$

$$g_{n+1}(y)\equiv 0=\sum_{j=r+1}^{n+1} b_{n+1,\, j} G_j(y) \quad (b_{n+1,\, j}=0, \quad j=r+1, r+2, \dots, n, n+1). \tag{19}$$

(14), (17), (18) et (19) donnent ensemble l'analogue de (14) pour $n+1$. — Dans le cas b) nous prenons $F_{r+1}=f_{n+1}$ comme nouvelle fonction indépendante à côté de $F_1, F_2, \dots, F_r$ et nous rénumerons $G_{r+1}, G_{r+2}, \dots, G_n$ à G_{r+2}, $G_{r+3}, \dots, G_{n+1}$ (et pour cela aussi b_{kj} à $b_{k,j+1}$) et alors nous avons

$$f_k(x)=\sum_{i=1}^{r+1} a_{ki} F_i(x) \quad (a_{k,\, r+1}=0; \ k=1, 2, \dots, n)$$

$$f_{n+1}(x)=\sum_{i=1}^{r+1} a_{n+1,\, i} F_i(x) \quad (a_{n+1,\, i}=0, \ i=1, 2, \dots, r; \ a_{n+1,\, r+1}=1),$$

$$g_k(y)=\sum_{j=r+2}^{n+1} b_{kj} G_j(y) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$g_{n+1}(y)\equiv 0=\sum_{j=r+2}^{n+1} b_{n+1,\, j} G_j(y) \quad (b_{n+1,\, j}=0, \ j=r+2, \dots, n+1).$$

Aussi ces-ci sont des formules de la forme (14) pour $n+1$.

B) Si $g_{n+1}(y)\not\equiv 0$, il existe alors au moins un y_0 tel que $g_{n+1}(y_0)\neq 0$, nous avons donc (7) et l'équation (8) de la forme (3). L'hypothèse d'induction donne

$$f_k(x)=\sum_{i=1}^{r} a_{ki} F_i(x) \quad (k=1, 2, \dots, n) \tag{20}$$

et

$$g_k(y) + C_k\, g_{n+1}(y) = \sum_{j=r+1}^{n} b_{kj}\, G_j(y) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

De (7) et de (20) il suit

$$f_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{r} a_{n+1,\, i}\, F_i(x). \tag{22}$$

Il faut de nouveau distinguer deux cas selon que g_{n+1} est a) linéairement dépendant ou b) linéairement indépendant de $G_{r+1}, G_{r+2}, \ldots, G_n$. Dans le cas a) ($G_{n+1}$ étant de nouveau une fonction arbitraire linéairement indépendante de $G_{r+1}, G_{r+2}, \ldots, G_n$)

$$g_{n+1}(y) = \sum_{j=r+1}^{n} b_{n+1,\, j}\, G_j(y) = \sum_{j=r+1}^{n+1} b_{n+1,\, j}\, G_j(y) \quad (b_{n+1,\, n+1} = 0) \tag{23}$$

subsiste et de (21)

$$g_k(y) = \sum_{j=r+1}^{n} (b_{kj} - C_k\, b_{n+1,\, j})\, G_j(y) = \sum_{j=r+1}^{n+1} b'_{kj}\, G_j(y) \tag{24}$$

$(b'_{kj} = b_{kj} - C_k\, b_{n+1,\, j}; \quad j = r+1,\ r+2, \ldots, n; \quad b'_{k,\, n+1} = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, n).$

(20), (22), (23) et (24) donnent ensemble de nouveau des solutions de la forme (14) avec $(n+1)$ au lieu de n. — Finalement, dans le cas b) nous prenons $G_{n+1} = g_{n+1}$ comme nouvelle fonction indépendante à côté de

$$G_{r+1},\ G_{r+2}, \ldots, G_n$$

et ainsi (21) entraîne

$$g_k(y) = \sum_{j=r+1}^{n} b_{kj}\, G_j(y) - C_k\, G_{n+1}(y) = \sum_{j=r+1}^{n+1} b_{kj}\, G_j(y)$$

$$(b_{k,\, n+1} = -C_k; \quad k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$g_{n+1}(y) = \sum_{j=r+1}^{n+1} b_{n+1,\, j}\, G_j(y) \quad (b_{n+1,\, j} = 0 \quad j = r+1,\ r+2, \ldots, n;\ b_{n+1,\, n+1} = 1).$$

Ces formules donnent avec (20) et (22) de nouveau un système de solutions de la forme (14) avec $(n+1)$ au lieu de n.

Ainsi, tous les cas possibles ont été pris en considération et la formule (14) se trouve démontrée par induction.

Pour démontrer la validité de (15) nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme. *Si les fonctions*

$$F_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

d'une part et

$$G_j(y) \quad (j = r+1,\ r+2, \ldots, n)$$

d'autre part sont linéairement indépendantes entre elles, alors le système de fonctions à deux variables

$$\{F_i(x)\, G_j(y)\} \quad (i = 1, 2, \ldots, r; \quad j = r+1,\ r+2, \ldots, n)$$

est aussi linéairement indépendant, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} c_{ij} F_i(x) G_j(y) \equiv 0 \quad \textit{entraîne} \; c_{ij} = 0 \tag{25}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r; \; j = r+1, \; r+2, \ldots, n).$$

Démonstration du lemme. Substituons en

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} c_{ij} F_i(x) G_j(y) \equiv 0$$

pour x un élément fixé x_0, alors

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} c_{ij} F_i(x_0) G_j(y) \equiv 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=r+1}^{n} b_j G_j(y) \equiv 0, \quad \text{où} \quad b_j = \sum_{i=1}^{r} c_{ij} F_i(x_0) \quad (j = r+1, \; r+2, \ldots, n)$$

et à cause de l'indépendance linéaire des $G_j(y)$ $(j = r+1, \; +2, \ldots, n)$, il faut que

$$b_j = 0 \quad (j = r+1, \; r+2, \ldots, n)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{r} c_{ij} F_i(x_0) = 0 \quad (j = r+1, \; r+2, \ldots, n).$$

Mais cela doit subsister pour toutes les valeurs x possibles, donc

$$\sum_{i=1}^{r} c_{ij} F_j(x) \equiv 0 \quad (j = r+1, \; r+2, \ldots, n),$$

ce qui entraîne à cause de l'indépendance linéaire des $F_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$

$$c_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r; \; j = r+1, \; r+2, \ldots, n),$$

c. q. f. d.

Fin de la démonstration du théorème 1. En substituant (14) en (3), on arrive à

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} a_{ki} b_{kj} F_i(x) G_j(y) = 0,$$

ce qui en vertu de la relation (25) du lemme ne peut subsister que si

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r; \; j = r+1, \; r+2, \ldots, n) \tag{15}$$

et ainsi la démonstration du théorème est achevée.

6. Comme application nous voulons traiter encore l'équation fonctionnelle

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(x) g_k(y) = \sum_{k=1}^{m} f_k(y) g_k(x), \tag{26}$$

considérée par *L. J. Magnus* [1] et *T. Popoviciu* [5]. L'équation (26) est une équation de la forme (3), où

$$n = 2m, \quad f_{m+k}(x) = g_k(x), \quad g_{m+k}(y) = -f_k(y) \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Ainsi (14) donne

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{r} a_{ki} F_i(x), \quad g_k(x) = \sum_{i=1}^{r} a'_{ki} F_i(x) \tag{27}$$

$$g_k(y) = \sum_{j=r+1}^{2m} b_{kj} G_j(y), \quad f_k(y) = \sum_{j=r+1}^{2m} b'_{kj} G_j(y). \tag{28}$$

Puisque, entre les a_{ki}, a'_{ki}, b_{kj}, b'_{kj} peuvent se trouver des zéros, (27) et (28) signifient, que les f_k (et de même les g_k) peuvent être exprimées avec au plus $r' = \min(r, 2m - r) \leq m$ fonctions linéairement indépendantes. En ajoutant, si nécessaire, encore $m - r'$ fonctions indépendantes avec des coefficients 0-s, on a

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{ki} F_i(x), \quad g_k(x) = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} F_j(x). \tag{29}$$

En substituant cela en (26) et employant (25) du Lemme de **5**, on a

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ki} b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} b_{ki} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, m) \tag{30}$$

et cela donne le

Théorème 2. *Toute solution de l'équation fonctionnelle* (26) *est de la forme* (29), *où* $F_1, F_2, \dots, F_m$ *sont des fonctions linéairement indépendantes et* a_{ki}, b_{kj} $(i, j, k = 1, 2, \dots, m)$ *sont des constantes arbitraires avec la restriction* (30) *et réciproquement, toutes les fonctions de la forme* (29) *avec la restriction* (30) *satisfont à* (26).

Ainsi tous les deux membres de (26) *doivent être de la forme*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} F_i(x) F_j(y), \quad \text{où} \quad c_{ij}\left(= \sum_{k=1}^{m} a_{ki} b_{kj}\right) = c_{ji} \; (i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, m).$$

Si, en particulier, dans (26) *p. ex.* $f_1, f_2, \dots, f_n$ *sont des fonctions linéairement indépendantes, alors il doit être*

$$g_k(x) = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} f_j(x)$$

et de (30) $\left(\textit{étant dans ce cas } a_{ki} = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}\right)$

$$b_{ij} = b_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, m).$$

Ceci est en accord avec [1] et [5].

Pour des autres applications, *voir* encore *O. Suto* [2] et [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. J. Magnus: *Über die Relationen der Functionen, welche der Gleichung* $F_1 y \varphi_1 x + F_2 y \varphi_2 x + \cdots + F_n y \varphi_n x = F_1 x \varphi_1 y + F_2 x \varphi_2 y + \cdots + F_n x \varphi_n y$ *genugthun.* J. reine angew. Math. 5 (1830), 365—373.

[2] O. Suto: *Studies on some functional equations.* Tôhoku math. J. 6 (1914), 1—15.

[3] O. Suto: *Studies on some functional equations.* Tôhoku math. J. 6 (1914), 82—101.

[4] D. S. Mitrinović: *Sur une équation fonctionnelle.* C. R. Paris 237 (1953), 550—551.

[5] T. Popoviciu: *Asupra unor ecuaţiei funcţionale.* Studii cerc. şţi. Cluj. 6 (1955), No. 3—4, 37—49.

[6] D. S. Mitrinović: *Sur un procédé fournissant des équations fonctionnelles dont les solutions continues et différentiables peuvent être déterminées.* Publ. Fac. Électrotechn. Univ. Belgrade, ser. math.—phys. 1956, No. 5, 1—8.

[7] J. Aczél: *Miszellen über Funktionalgleichungen.* I. Math. Nachr. 19 (1958), 87—89.

[8] O. E. Gheorghiu: *Об одной системе функциональных уравнений обобщающей функциональное уравнение Д. С. Митриновича изученное также Я. Ацельем.* Publ. Fac. Elektrotechn. Univ. Belgrade, ser. math. phys. 1960, No. 35—37, 9—15.

[9] J. Aczél: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Basel—Stutt-gart—Berlin, 1961.

10] J. Aczél, *Megjegyzés a „változók szétválasztásának módszeréhez" és annak általánosi tása.* Mat. lapok 12 (1961).