PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 61 (1961)

SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DONT LES SOLUTIONS GÉNÉRALES PEUVENT ÊTRE DÉTERMINÉES*

Dragoslav S. Mitrinović et *Dragomir Đoković*

(Reçu le 17 avril 1961)

Hypothèse H_1. — Soit E un ensemble muni de deux opérations $\vee$, avec $E \vee E = E$, et $\circ$ (opération interne), et possédant un élément e tel que, pour chaque $x \in E$, on ait:

$$x \vee e = e \vee x = e,$$

$$x \circ e = e \circ x = x.$$

Exemple. Cette hypothèse est vérifiée dans l'ensemble des nombres réels muni des opérations: multiplication ordinaire $(= \vee)$ et addition ordinaire $(= \circ)$. Le rôle de e joue ici le nombre 0.

Hypothèse H_2. — Il existe, pour l'opération $\vee$, l'élément neutre e' $(\neq e)$.

Hypothèse H_3. — Soit f une fonction dépendant des variables

$$x_1, x_2, \ldots \in E$$

et supposons que les valeurs de cette fonction appartiennent à un groupe abélien additif M dans lequel l'équation $nX = A$ $(X, A \in M)$ a la solution unique $X = A/n$ (n nombre naturel).

Théorème 1. — *Si, outre l'hypothèse* H_1, *l'opération* $\vee$ *est commutative, l'équation fonctionnelle*

$$\begin{aligned}(1.\ 1)\qquad & f(x_1 \circ x_2, x_3) - f(x_1 \vee x_2, x_3) - f(x_1 \circ x_2, x_3 \vee x_4)\\ & + f(x_2 \circ x_3, x_4) - f(x_2 \vee x_3, x_4) - f(x_2 \circ x_3, x_4 \vee x_1)\\ & + f(x_3 \circ x_4, x_1) - f(x_3 \vee x_4, x_1) - f(x_3 \circ x_4, x_1 \vee x_2)\\ & + f(x_4 \circ x_1, x_2) - f(x_4 \vee x_1, x_2) - f(x_4 \circ x_1, x_2 \vee x_3) = 0,\end{aligned}$$

---

* Cet article est succintement résumé dans une notre Note parue dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris,* t. 252, 1961, sous le titre suivant: *Sur quelques équations fonctionnelles.*

où la fonction f remplit l'hypothèse H_3, avec $n=2$ *et* $A=0$, *admet comme solution générale la fonction*

(1. 2) $$f(t_1, t_2)=F(t_1)-F(t_2),$$

F étant une fonction arbitraire.

Démonstration. — Si dans l'équation (1. 1) on met $x_3=x_4=e$, on obtient

(1. 3) $$f(x_1, x_2)=f(x_1 \vee x_2, e)+f(e, x_1 \vee x_2)+f(x_1, e)+f(e, x_2)+f(e, e).$$

Dans le cas où $x_2=x_4=e$, l'équation (1. 1) devient

$$f(x_1,x_3)+f(x_3, x_1)=f(e, x_1)+f(x_1, e)+f(e, x_3)+f(x_3, e)+2f(e, e).$$

La dernière relation étant valable pour tous les $x_1, x_3 \in E$, on a également

(1. 4) $$f(x_1, x_2)+f(x_2, x_1)=f(e, x_1)+f(x_1, e)+f(e, x_2)+f(x_2, e)+2f(e, e).$$

Si dans (1. 3) on permute x_1 et x_2, on obtient

(1. 5) $$f(x_2, x_1)=f(x_2 \vee x_1, e)+f(e, x_2 \vee x_1)+f(x_2, e)+f(e, x_1)+f(e, e).$$

Puisque l'opération $\vee$ est supposée commutative, on a

(1. 6) $$f(x_1, x_2)+f(x_2, x_1)=2f(x_1 \vee x_2, e)+2f(e, x_1 \vee x_2)$$
$$+f(x_1, e)+f(e, x_1)+f(x_2, e)+f(e, x_2)+2f(e, e).$$

En comparant les égalités (1. 4) et (1. 6), on trouve

(1. 7) $$f(x_1 \vee x_2, e)+f(e, x_1 \vee x_2)=0.$$

Étant donné que l'hypothèse $E \vee E=E$ entraîne, pour chaque $x \in E$,

$$x=x_1 \vee x_2 \qquad (x_1, x_2 \in E),$$

l'égalité (1. 7) devient

(1. 8) $$f(x, e)+f(e, x)=0.$$

Vu l'égalité (1. 7), la formule (1. 3) prend la forme simple

(1. 9) $$f(x_1, x_2)=f(x_1, e)+f(e, x_2)+f(e, e)$$

ou bien, d'après (1. 8),

(1. 10) $$f(x_1, x_2)=f(x_1, e)-f(x_2, e)+f(e, e).$$

En posant $x=e$, l'égalité (1. 8) se ramène à

$$2f(e, e)=0 \Rightarrow f(e, e)=0 \qquad \text{(d'après l'hypothèse } H_3).$$

Par suite, toute solution de l'équation (1) a la forme

$$f(x_1, x_2)=f(x_1, e)-f(x_2, e).$$

Inversement, on vérifie sans difficulté que toute fonction ayant la forme (1. 2) satisfait à l'équation (1. 1).

Donc, la fonction (1. 2) est la solution générale de (1. 1), ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 2. — *Supposant les hypothèses* H_1 *et* H_3, *avec* $n=2$ *et* $A=0$, *vérifiées et l'opèration* $\vee$ *associative, la solution générale de l'équation fonctionnelle* (1. 1) *est déterminée par* (1. 2).

Démonstration. — Les égalités (1. 3), (1. 4), (1. 5) sont ici aussi en vigueur. A partir des (1. 3) et (1. 5) il vient

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2)+f(x_2, x_1) = & f(x_1 \vee x_2, e)+f(e, x_1 \vee x_2) \\ & +f(x_2 \vee x_1, e)+f(e, x_2 \vee x_1)+f(x_1, e) \\ & +f(e, x_1)+f(x_2, e)+f(e, x_2)+2f(e, e). \end{aligned}$$

En confrontant la dernière égalité avec (1. 4), on trouve

$$f(x_1 \vee x_2, e)+f(e, x_1 \vee x_2)+f(x_2 \vee x_1, e)+f(e, x_2 \vee x_1)=0. \tag{2. 1}$$

Si l'on pose

$$f(x, e)+f(e, x)=g(x),$$

l'égalité (2. 1) devient

$$g(x_1 \vee x_2)=-g(x_2 \vee x_1). \tag{2. 2}$$

Eu égard à (2. 2) et mettant à profit l'associativité de l'opération $\vee$ et la condition $E \vee E=E$, on trouve

$$\begin{aligned} g(t) &= g(x_1 \vee t_1)=g(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \\ &= \quad g\{(x_1 \vee x_2) \vee x_3\}=-g\{x_3 \vee (x_1 \vee x_2)\} \\ &= -g\{(x_3 \vee x_1) \vee x_2\}= \quad g\{x_2 \vee (x_3 \vee x_1)\} \\ &= \quad g\{(x_2 \vee x_3) \vee x_1\}=-g\{x_1 \vee (x_2 \vee x_3)\} \\ &= -g(t), \end{aligned}$$

ce qui entraîne $g(t)=0$.

Or, nous avons prouvé que

$$g(x)=f(x, e)+f(e, x)=0,$$

c'est-à-dire la validité de l'égalité (1. 8). Ceci étant, la preuve du théorème 2 s'achève de même que celle du théorème précédent.

Théorème 3. — *Le théorème* 1 *reste en vigueur si l'on y remplace la commutativité de l'opération* $\vee$ *par l'hypothèse* H_2.

Démonstration. — Pour prouver ce théorème, on commence par poser $x_2=e'$ dans (2. 2). Alors, il vient

$$g(x)=f(x, e)+f(e, x)=0$$

et la preuve s'achève alors sans difficulté.

Théorème 4*. — *Dans les hypothèses H_1 et H_3, avec $A=0$, l'équation fonctionnelle suivante*

$$
\begin{aligned}
(4.\ 1)\quad & f(x_1 \circ x_2, x_3) && -f(x_1 \vee x_2, x_3) && -f(x_1 \circ x_2, x_3 \vee x_4)\\
& +f(x_2 \circ x_3, x_4) && -f(x_2 \vee x_3, x_4) && -f(x_2 \circ x_3, x_4 \vee x_5)\\
& \vdots && \vdots && \vdots\\
& +f(x_{n-2} \circ x_{n-1}, x_n) && -f(x_{n-2} \vee x_{n-1}, x_n) && -f(x_{n-2} \circ x_{n-1}, x_n \vee x_1)\\
& +f(x_{n-1} \circ x_n, x_1) && -f(x_{n-1} \vee x_n, x_1) && -f(x_{n-1} \circ x_n, x_1 \vee x_2)\\
& +f(x_n \circ x_1, x_2) && -f(x_n \vee x_1, x_2) && -f(x_n \circ x_1, x_2 \vee x_3)=0 \quad (n \geqslant 5)
\end{aligned}
$$

ou, sous la forme abrégée,

$$\sum_{i=1}^{n} \{f(x_i \circ x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i \vee x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i \circ x_{i+1}, x_{i+2} \vee x_{i+3})\} = 0$$

$$(x_{i+n} \equiv x_i \ \ et \ \ n \geqslant 5),$$

admet comme solution générale la fonction

$$f(t_1, t_2) = F(t_1) - F(t_2), \tag{4. 2}$$

où $F(t)$ est une fonction arbitraire.

Démonstration. — Si l'on pose

$$x_k = e \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

l'équation (4. 1) prend la forme que voici

$$nf(e, e, e) = 0 \Rightarrow f(e, e, e) = 0 \qquad (\text{selon l'hypothèse } H_3).$$

Pour $x_k = e$ $(k=3, 4, \ldots, n)$ l'équation (4. 1) devient

$$f(x_1, x_2) = f(x_1 \vee x_2, e) + f(e, x_1 \vee x_2) + f(x_1, e) + f(e, x_2). \tag{4. 3}$$

L'équation (4. 1), si l'on y pose

$$x_k = e \qquad (k=2 \text{ et } k=4, 5, \ldots, n),$$

se ramène à

$$f(x_1, x_3) = f(x_1, e) + f(e, x_3),$$

ou bien

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, e) + f(e, x_2). \tag{4. 4}$$

* L'équation (4. 1) englobe comme cas particulier l'équation (1. 1) correspondant à $n=4$. Toutefois, dans la résolution de l'équation (1. 1) il est apparu nécessaire de supposer soit la commutativité de l'opération $\vee$, soit l'associativité de même opération, soit l'existence de l'élément neutre pour l'opération $\vee$, ce que la démonstration du théorème 4, où $n \geqslant 5$, n'exige pas.

Il serait intéressant d'examiner si cette hypothèse complémentaire est nécessaire et de trouver un exemple dans lequel l'opération $\vee$ ne jouirait pas d'une des propriétés indiquées plus haut et conséquemment l'équation (1. 1) aurait des solutions autres que celles (1. 2). Cette fois, nous laissons en suspens le problème ainsi mis au point.

Des égalités (4. 3) et (4. 4) on déduit

$$f(x_1 \vee x_2, e) + f(e, x_1 \vee x_2) = 0,$$

ou bien

$$f(x, e) + f(e, x) = 0. \tag{4. 5}$$

Ceci étant, l'égalité (4. 4) se transforme en

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, e) - f(x_2, e), \tag{4. 6}$$

ce qui peut aussi s'écrire sous la forme (4. 2).

Puisque toute solution de l'équation (4. 1) possède la forme (4. 2), et inversement, puisque la fonction (4. 2) est vraiment la solution de l'équation (4. 1), il s'ensuit que la fonction (4. 2) est la solution générale de (4. 1).

Théorème 5. — *Supposons qu'un ensemble E soit muni de n opérations internes*

$$\circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_n$$

pour lesquelles subsiste l'élément neutre commun e. Relativement à la fonction f on suppose vérifiée l'hypothèse H_3, où il faut remplacer n par 2 n.

Ceci étant admis, l'équation fonctionnelle

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{2n} f(x_i \circ_k x_{i+1}, x_{i+2} \circ_{k+1} x_{i+3}, \ldots, x_{i+2n-2} \circ_{k+n-1} x_{i+2n-1}) = 0 \tag{5. 1}$$

$$(x_{2n+k} \equiv x_k; \quad \circ_{n+k} \equiv \circ_k)$$

admet comme solution générale la fonction suivante

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = F(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n) - F(t_2, t_3, \ldots, t_n, t_1), \tag{5. 2}$$

où F est une fonction quelconque dépendant des arguments mis en évidence.

Démonstration. — L'équation (5. 1) pour

$$x_k = e \qquad (k = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1)$$

prend la forme

$$2n \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i}, x_{2i+2}, \ldots, x_{2i+2n-2}) = 0$$

ou bien, après changement des lettres dont dépend la fonction f,

$$2n \sum_{i=1}^{n} f(t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+n-1}) = 0 \qquad (t_{i+n} \equiv t_i).$$

Il en résulte, d'après l'hypothèse H_3,

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+n-1}) = 0 \qquad (t_{i+n} \equiv t_i). \tag{5. 3}$$

Étant donné que la solution générale de l'équation (5. 3) possède la forme suivante [1]

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = F(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n) - F(t_2, t_3, \ldots, t_n, t_1),$$

toute solution de (5. 1) est, à la vérité, de la forme (5. 2). D'autre part, la fonction (5. 2), comme le montre la vérification directe, est la solution de (5. 1).

Par suite, le théorème 5 est démontré.

Théorème 6. — *Supposant vérifiées les hypothèses H_1, H_2 et H_3, avec $n = 2, 3, 5$, la solution générale de l'équation fonctionnelle*

$$\sum_{i=1}^{5} \{f(x_i \circ x_{i+1}, x_{i+2} \vee x_{i+3}, x_{i+4}) + f(x_i \vee x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3} \circ x_{i+4}) + f(x_i, x_{i+1} \circ x_{i+2}, x_{i+3} \vee x_{i+4})\} = 0 \qquad (x_{5+i} \equiv x_i) \tag{6. 1}$$

est représentée par la fonction

$$f(t_1, t_2, t_3) = F(t_1, t_2, t_3) - F(t_2, t_3, t_1), \tag{6. 2}$$

en désignant $F(t_1, t_2, t_3)$ une fonction arbitraire.

Démonstration. — Par substitution directe on vérifie que la fonction (6. 2) est certes une solution de l'équation (6. 1).

Inversement, en partant de la supposition que la fonction $f(t_1, t_2, t_3)$ est une solution quelconque de l'équation (6. 1), nous allons prouver que sa forme est précisément celle donnée par (6. 2).

L'équation (6. 1) pour $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = e$ devient

$$15\, f(e, e, e) = 0,$$

d'où, vu l'hypothèse H_3, il s'ensuit

$$f(e, e, e) = 0. \tag{6. 3}$$

Si dans l'équation (6. 1) on pose $x_1 = x$, $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = e$ et si l'on se sert de l'égalité (6. 3), on obtient

$$3\,\{f(x, e, e) + f(e, x, e) + f(e, e, x)\} = 0.$$

On en tire

$$f(x, e, e) + f(e, x, e) + f(e, e, x) = 0. \tag{6. 4}$$

L'équation (6. 1), pour $x_3 = x_4 = x_5 = e$ et compte tenu de l'égalité (6. 4), prend la forme que voici

$$f(x_1, x_2, e) + f(e, x_1, x_2) + f(x_2, e, x_1) = 0. \tag{6. 5}$$

L'équation (6. 1), si l'on y remplace x_5 par e et si l'on fait usage de l'égalité (6. 5), devient

$$f(x_1 \vee x_2, x_3, x_4) + f(x_3, x_4, x_1 \vee x_2) + f(x_4, x_1 \vee x_2, x_3) + f(x_2 \vee x_3, x_4, x_1) + f(x_4, x_1, x_2 \vee x_3) + f(x_1, x_2 \vee x_3, x_4) = 0.$$

La dernière équation, si l'on y pose $x=e'$, prend la forme suivante:

$$2\{f(x_1, x_3, x_4)+f(x_3, x_4, x_1)+f(x_4, x_1, x_3)\}=0.$$

On en tire

$$f(x_1, x_2, x_3)+f(x_2, x_3, x_1)+f(x_3, x_1, x_2)=0. \tag{6. 6}$$

Cette égalité est précisément une conséquence de l'équation (6. 1). Étant donné que la solution générale de l'équation (6. 6) est celle donnée par (6. 2) {*voir* l'article **[1]**}, le théorème 6 se trouve ainsi démontré.

Théorème 7. — *Si les hypothèses H_1, H_2 et H_3, avec $n=2, 3$, sont remplies, la solution générale de l'équation fonctionnelle*

$$\sum_{i=1}^{6}\{f(x_i \circ x_{i+1}, x_{i+2} \vee x_{i+3}, x_{i+4})+f(x_i \vee x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3} \circ x_{i+4}) + f(x_i, x_{i+1} \circ x_{i+2}, x_{i+3} \vee x_{i+4})\}=0 \qquad (x_{6+i}\equiv x_i) \tag{7. 1}$$

est

$$f(t_1, t_2, t_3)=F(t_1, t_2)-F(t_2, t_3), \tag{7. 2}$$

où $F(t_1, t_2)$ est une fonction arbitraire.

Démonstration. — Si l'on substitue la fonction (7. 2) dans l'équation (7. 1), on voit que (7. 2) est, à la vérité, une solution de l'équation en question.

Nous allons montrer que la réciproque est également vraie, c'est-à-dire que toute solution de l'équation (7. 1) a la forme (7. 2).

Comme précédemment, dans l'équation (7. 1) posons

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=e.$$

Il vient alors

$$18f(e, e, e)=0,$$

d'où

$$f(e, e, e)=0. \tag{7. 3}$$

Si dans l'équation (7. 1) on met $x_1=x$ et $x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=e$ et on utilise (7. 3), on obtient

$$3\{f(x, e, e)+f(e, x, e)+f(e, e, x)\}=0.$$

On en tire

$$f(x, e, e)+f(e, x, e)+f(e, e, x)=0. \tag{7. 4}$$

En posant dans l'équation (7. 1) $x_3=x_4=x_5=x_6=e$ et mettant à profit les égalités (7. 3) et (7. 4), on trouve

$$f(x_1, x_2, e)+f(e, x_1, x_2)+f(e, e, x_1)+f(x_2, e, e)=0. \tag{7. 5}$$

Si, dans l'équation (7. 1), on pose $x_2=x_4=x_5=x_6=e$ et on utilise les égalités (7. 3) et (7. 4), on obtient

$$f(x_1, x_3, e)+f(x_3, e, x_1)+f(e, x_1, x_3)=0,$$

ce qui n'est autre que

$$f(x_1, x_2, e)+f(x_2, e, x_1)+f(e, x_1, x_2)=0. \tag{7. 6}$$

Des égalités (7. 5) et (7. 6) on tire

$$f(x_2, e, x_1)=f(x_2, e, e)+f(e, e, x_1). \tag{7. 7}$$

Pour $x_5=x_6=e$ l'équation (7. 1) se ramène à

$$\begin{aligned} & f(x_1 \circ x_2, x_3 \vee x_4, e)+f(x_1 \vee x_2, x_3, x_4)+f(x_1, x_2 \circ x_3, e) \\ & +f(x_2 \circ x_3, e, e) \quad +f(x_2 \vee x_3, x_4, e) \quad +f(x_2, x_3 \circ x_4, e) \\ & +f(x_3 \circ x_4, e, x_1) \quad +f(x_3 \vee x_4, e, x_1) \quad +f(x_3, x_4, e) \\ & +f(x_4, e, x_2) \quad +f(e, e, x_1 \circ x_2) \quad +f(x_4, e, x_1 \vee x_2) \\ & +f(e, x_1 \vee x_2, x_3) \quad +f(e, x_1, x_2 \circ x_3)+f(e, x_1, x_2 \vee x_3) \\ & +f(x_1, x_2 \vee x_3, x_4) \quad +f(e, x_2, x_3 \circ x_4)+f(e, x_1 \circ x_2, x_3 \vee x_4)=0. \end{aligned}$$

En faisant usage des égalités (7. 6) et (7. 7), la dernière équation se réduit à l'équation plus simple suivante:

$$\begin{aligned} & f(x_1 \vee x_2, x_3, x_4)+f(x_1, x_2 \vee x_3, x_4)+f(x_2 \vee x_3, x_4, e) \\ & +f(x_4, e, x_1 \vee x_2) \quad +f(e, x_1, x_2 \vee x_3)+f(e, x_1 \vee x_2, x_3) \\ & \qquad +f(x_3, x_4, e) \quad +f(x_4, e, x_1) \quad =0. \end{aligned}$$

Si l'on y pose $x_2=e'$, on obtient

$$2\{f(x_1, x_3, x_4)+f(x_3, x_4, e)+f(e, x_1, x_3)+f(x_4, e, x_1)\}=0.$$

On en tire

$$f(x_1, x_2, x_3)= -f(x_2, x_3, e)-f(e, x_1, x_2)-f(x_3, e, x_1). \tag{7. 8}$$

On peut montrer (ce qui ne sera pas utilisé dans la suite) que l'équation (7. 1) est une conséquence des égalités (7. 6), (7. 7) et (7. 8). En s'appuyant sur ces trois égalités, on obtient

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3)+f(x_2, x_3, x_1)+f(x_3, x_1, x_2) \\ & \quad =\{-f(x_2, x_3, e)-f(e, x_1, x_2)-f(x_3, e, x_1)\} \\ & \qquad +\{-f(x_3, x_1, e)-f(e, x_2, x_3)-f(x_1, e, x_2)\} \\ & \qquad +\{-f(x_1, x_2, e)-f(e, x_3, x_1)-f(x_2, e, x_3)\} \\ & \quad = -\{f(x_2, x_3, e)+f(e, x_2, x_3)+f(x_3, e, x_2)\}+f(x_3, e\ x_2)-f(x_2, e, x_3) \\ & \qquad -\{f(x_3, x_1, e)+f(e, x_3, x_1)+f(x_1, e, x_3)\}+f(x_1, e, x_3)-f(x_3, e, x_1) \\ & \qquad -\{f(x_1, x_2, e)+f(e, x_1, x_2)+f(x_2, e, x_1)\}+f(x_2, e, x_1)-f(x_1, e, x_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(x_3, e, e) + f(e, e, x_2) - f(x_2, e, e) - f(e, e, x_3) \\
&+ f(x_1, e, e) + f(e, e, x_3) - f(x_3, e, e) - f(e, e, x_1) \\
&+ f(x_2, e, e) + f(e, e, x_1) - f(x_1, e, e) - f(e, e, x_2) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

De la dernière égalité il suit {*voir* **[1]**} qu'il existe une fonction $G(t_1, t_2, t_3)$ pour laquelle est

$$f(x_1, x_2, x_3) = G(x_1, x_2, x_3) - G(x_2, x_3, x_1). \tag{7. 9}$$

L'égalité (7. 8), selon (7. 9), conduit à l'équation fonctionnelle en G que voici

$$
\begin{aligned}
G(x_1, x_2, x_3) - G(x_2, x_3, x_1) = &-G(x_2, x_3, e) + G(x_3, e, x_2) \\
&- G(e, x_1, x_2) + G(x_1, x_2, e) \\
&- G(x_3, e, x_1) + G(e, x_1, x_3).
\end{aligned} \tag{7. 10}
$$

La dernière équation, pour $x_3 = e$, prend la forme suivante

$$
\begin{aligned}
G(x_1, x_2, e) - G(x_2, e, x_1) = &-G(x_2, e, e) + G(e, e, x_2) \\
&- G(e, x_1, x_2) + G(x_1, x_2, e) \\
&- G(e, e, x_1) + G(e, x_1, e),
\end{aligned}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
G(x_2, e, x_1) - G(e, x_1, x_2) = \ &G(x_2, e, e) - G(e, e, x_2) \\
&+ G(e, e, x_1) - G(e, x_1, e).
\end{aligned}
$$

En utilisant la dernière égalité, à la fonction (7. 9) on donne la forme

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= \{G(x_1, x_2, e) - G(x_2, x_3, e)\} + G(x_3, e, x_2) - G(e, x_1, x_2) \\
&\qquad + G(e, x_1, x_3) - G(x_3, e, x_1) \\
&= \{G(x_1, x_2, e) - G(x_2, x_3, e)\} - \{G(e, x_1, x_2) - G(e, x_2, x_3)\} \\
&\quad + \{G(x_3, e, x_2) - G(e, x_2, x_3)\} - \{G(x_3, e, x_1) - G(e, x_1, x_3)\} \\
&= \{G(x_1, x_2, e) - G(x_2, x_3, e)\} - \{G(e, x_1, x_2) - G(e, x_2, x_3)\} \\
&\quad + \{G(x_3, e, e) - G(e, e, x_3) + G(e, e, x_2) - G(e, x_2, e)\} \\
&\quad - \{G(x_3, e, e) - G(e, e, x_3) + G(e, e, x_1) - G(e, x_1, e)\} \\
&= \{G(x_1, x_2, e) - G(x_2, x_3, e)\} - \{G(e, x_1, x_2) - G(e, x_2, x_3)\} \\
&\quad + \{G(e, x_1, e) - G(e, x_2, e)\} - \{G(e, e, x_1) - G(e, e, x_2)\}.
\end{aligned}
$$

Si l'on pose, enfin,

$$F(x_1, x_2) = G(x_1, x_2, e) - G(e, x_1, x_2) + G(e, x_1, e) - G(e, e, x_1),$$

la fonction s'écrit sous la forme définitive

$$f(x_1, x_2, x_3) = F(x_1, x_2) - F(x_2, x_3),$$

ce qui est, précisément, la forme de la solution (7. 2).

On conclut de là que la fonction (7. 2) est la solution générale de l'équation (7. 1).

Les résultats de cet article se rattachent à nos travaux antérieurs **[2]**.

Remarque

J. Aczél, M. Ghermanescu et *M. Hosszú* dans leur article **[1]** ont considéré l'équation cyclique suivante:

$$\text{(R. 1)} \quad \begin{aligned} & f(x_1\ x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p) + f(x_2, x_3, \ldots, x_p, x_{p+1}) + \cdots \\ & + f(x_{n-p+1} \cdot x_{n-p+2}, \ldots, x_{n-1}, x_n) + f(x_{n-p+2}, x_{n-p+3}, \ldots, x_n, x_1) + \cdots \\ & + f(x_n, x_1, \ldots, x_{p-2}, x_{p-1}) = 0 \qquad (p \leqslant n) \end{aligned}$$

et ont donné un procédé élémentaire pour déterminer sa solution générale dans l'hypothèse H_3, avec une légère modification.

On pourrait se demander si l'on pourrait déterminer, en partant de l'équation (R. 1) et de sa solution, les solutions d'autres équations cycliques, comme le sont, par exemple, les équations cycliques (1. 1), (4. 1), (5. 1), (6. 1) et (7. 1), résolues dans le présent article. La réponse est négative.

Pour le montrer, prenons, comme exemple, l'équation fonctionnelle suivante:

$$\text{(R. 2)} \qquad f(x+y, z) + f(y+z, x) + f(z+x, y) = 0,$$

où x, y, z appartiennent à l'ensemble des nombres réels.

Pour appliquer le résultat indiqué dans l'article **[1]**, posons

$$\text{(R. 3)} \qquad f(x+y, z) \equiv g(x, y, z).$$

L'équation (R. 2) devient alors

$$\text{(R. 4)} \qquad g(x, y, z) + g(y, z, x) + g(z, x, y) = 0.$$

Cette équation rentre dans le type (R. 1) et sa solution générale est

$$\text{(R. 5)} \qquad g(x, y, z) = F(x, y, z) - F(x, y, z),$$

où $F(x, y, z)$ désigne une fonction arbitraire des variables mises en évidence.

Par conséquent, il faut qu'on ait

$$\text{(R. 6)} \qquad f(x+y, z) = F(x, y, z) - F(y, z, x).$$

Cette équation est également une équation fonctionnelle (à deux fonctions inconnues f et F). La résolution de cette équation n'est pas moins difficile que celle de l'équation (R. 2), bien au contraire.

En passant, notons que la solution générale continue de l'équation (R. 2) est [3]

(R. 7) $$f(u, v) = (u-2v)\ G(u+v),$$

où $G(t)$ représente une fonction continue quelconque.

Or, la solution (R. 7) ne peut être obtenue au moyen de la méthode développée dans l'article [1], ce qui signifie que l'équation (R. 1) est une équation cyclique particulière. A propos de cette observation il faut voir aussi la note due à *Mitrinović* et *Đoković* [2] et la monographie [4], p. 156—157.

M. *J. Aczél* a bien voulu lire le manuscript d'une partie de cet article (les théorèmes 1, 4, 5) et il nous a fait quelques observations utiles. Nous avons eu également un échange de correspondance avec MM. *M. Hosszú* et *J. Aczél* au sujet des articles [2].

Ajouté à la correction des épreuves

M. *J. Aczél*, qui a bien voulu lire une épreuve de cet article, a remarqué qu'on peut simplifier la démonstration du théorème 7 de la manière suivante. Au lieu de la relation

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_1) + f(x_3, x_1, x_2) = 0,$$

qui se trouve à la fin de la page 8 de cet article, on peut, par une voie tout à fait analogue, démontrer la relation

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = 0 \qquad (x_{i+5} = x_i),$$

de laquelle il suit (*voir* [1]) immédiatement (7. 2).

RÉFÉRENCES

[1] J. Aczél—M. Ghermanescu—M. Hosszú: *On cyclic equations,* Publications of the Mathematical Institute of Hungarian Academy of Sciences, t. 5, series A, fasc. 1—2, 1960, p. 215—221.

[2] D. S. Mitrinović—D. Đoković: *Sur une classe d'équations fonctionnelles,* Comptes rendus de l' Académie des sciences de Paris, t. 252, 1961, p. 1090—1092.

D. Đoković: *Sur une équation fonctionnelle,* Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université de Belgrade, série: Mathématiques et physique, №. 50, 1961, p. 15—16.

[3] D. Đoković: *Sur quelques équations fonctionnelles cycliques se réduisant à l'équation de Cauchy,* Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université de Belgrade, № 63, 1961.

[4] J. Aczél: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen,* Basel 1961.