PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA – SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 57 (1961)

UN THÉORÈME SE RAPPORTANT AUX SÉRIES SEMI-CONVERGENTES

Lazar Karadžić

Théorème 1. — *Supposons que les termes des suites $\{S_m\}$ et $\{T_n\}$ satisfont aux conditions:*

$$(1) \qquad \begin{cases} 0 < S_1 < S_2 < \ldots < S_m \to \infty, & m \to \infty, \\ 0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n \to \infty, & n \to \infty, \end{cases}$$

$$(m \leqslant n).$$

S'il existe une telle suite de nombres $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n > 1)$ que la suite

$$(2) \qquad \{\alpha_n\} \equiv \left\{ \frac{(S_m - S_{m-1})\,\lambda_m}{(T_{m+d_m} - T_{m+d_m-1})\,\lambda_{m+d_m}} \prod_{k=m}^{m+d_m-1} \left(1 - \frac{1}{\lambda_k}\right) \right\}, \qquad n = m + d_m,$$

(d_m est un nombre entier positif plus grand ou égal au zéro)
ait un nombre fini de points d'accumulation dans l'intervalle

$$(3) \qquad 0 < l = \varliminf_{n \to \infty} \alpha_n \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \alpha_n = L < \infty,$$

et que

$$(4) \qquad \begin{cases} (S_m - S_{m-1})\,\lambda_m \to 0, \quad n \to \infty, \\ (T_m - T_{m-1})\,\lambda_m \to 0, \quad n \to \infty, \\ 0 < \varliminf_{n \to \infty} \dfrac{S_m(1 - 1/\lambda_m)}{T_{m+d_m}\,(1 - 1/\lambda_{m+d_m})} \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \dfrac{S_m(1 - 1/\lambda_m)}{T_{m+d_m}\,(1 - 1/\lambda_{m+d_m})} < \infty, \end{cases}$$

alors la suite

$$\{T_{n+d_n} - S_n\}$$

est bornée. Dans le cas spécial cette suite converge si

$$(5) \qquad \lim_{n \to \infty} \alpha_n = C \qquad (0 < C < \infty)$$

ou bien si la différence $\quad (T_m - T_{m-1}) - (S_m - S_{m-1})$

est constamment positive, mais sous condition que les relations (3) *et* (4) *sont satisfaites.*

Supposons que les conditions (1) et (4) sont satisfaites. Les suites $\{S_m\}$ et $\{T_n\}$ peuvent alors être écrites sous la forme

$$\frac{S_m}{M}=\frac{S_1}{M}+\frac{S_2-S_1}{M}+\cdots+\frac{S_m-S_{m-1}}{M}=\frac{S_1\lambda_1}{M}(1-e^{lg\,(1-1/\lambda_1)})+$$

$$+\sum_{k=2}^{m}(S_k-S_{k-1})\frac{\lambda_k}{M}(1-e^{lg\,(1-1/\lambda_k)}) \quad \text{et}$$

(6)

$$\frac{T_n}{M}=\frac{T_1}{M}+\frac{1}{M}\sum_{k=2}^{n}(T_k-T_{k-1})=\frac{T_1\lambda_1}{M}(1-e^{lg\,(1-1/\lambda_k)})+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}(T_k-T_{k-1})\frac{\lambda_k}{M}(1-e^{lg\,(1-1/\lambda_k)})$$

où

$$S_1\lambda_1<M,\ (S_m-S_{m-1})\lambda_m<M;\ T_1\lambda_1<M,(T_n-T_{n-1})\lambda_n<M.$$

De la supposition (1) il s'ensuit que dans les relations

$$(7)\qquad \frac{(S_m-S_{m-1})\lambda_n}{M\prod_{k=1}^{m-1}(1-1/\lambda_k)}=e^{c_m} \qquad \text{et} \qquad \frac{(T_n-T_{n-1})\lambda_n}{M\prod_{k=1}^{n-1}(1-1/\lambda_k)}=e^{c'_m},$$

les suites $\{c_m\}$ et $\{c_n'\}$ divergent, c. à d. $c_m\to\infty$, $m\to\infty$ et $c_n'\to\infty$, $n\to\infty$, car si elles convergeaient ou étaient bornées, les suites $\{S_m\}$ et $\{T_n\}$ convergeraient, ce qui n'est pas le cas. Lorsqu'on prend en considération que les droites $x=c_n$ et $x=c_n'$ ainsi que l'axe x sont des paralèles aux droites passant par les points donnés d'après lesquels ont été formées, selon le procédé connu [1], les sommes (6).

Si $c_n'-c_m=O(1)$, $n\to\infty$ $(n=m+d_m)$ il résulte alors de (7), que la suite (2) est également bornée, ou si la suite $\{c_n'-c_m\}$ converge, la suite (2) converge alors aussi. Géométriquement, il est évident que la suite $\{T_n-S_m\}$ sous condition (4) converge selon que la suite $\{c_n'-c_m\}$ ou la suite (2) converge ou ne converge pas, ce qui était à démontrer. Ainsi, par exemple

$$\lim_{n\to\infty}(T_n-S_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k<n}^{n}\frac{1}{k\lg k\lg_2 k\ldots\lg_p k}-\lg_{p+1}n\right)=C_p$$

$$(\lg_p n=\lg\lg_{p-1}n,\ C_p<\infty)$$

car, d'après le théorème ci-dessus

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\equiv\frac{\dfrac{1}{n\lg n\lg_2 n\ldots\lg_p n}}{\lg_{p+1}n-\lg_{p+1}(n-1)}=1, \qquad n\to\infty.$$

De même, de ce théorème il résulte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\lg n\right)=C,$$

où C représente la constante d'Euler, car

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\equiv\frac{\dfrac{1}{n}}{\lg n-\lg(n-1)}=1, \qquad n\to\infty.$$

Envisageons la série à termes réels $\sum_{1}^{\infty} a_n$ qui converge, mais non pas d'une façon absolue. Si la somme partielle de cette série est écrite de la façon suivante:

(8)
$$s_n = \sum_{1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{r} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{s} a_{q_k} = S_r - T_s ,$$

$$(P_1 < P_2 < \ldots < P_r, q_1 < q_2 < \ldots < q_s; \quad a_{p_k} > 0, \ a_{q_s} < 0; \ r+s=n).$$

D'après cette supposition il est évident que

$$\lim_{r\to\infty} S_r = \lim_{r\to\infty} \sum_{1}^{r} a_{p_k} = \infty ; \ \lim_{s\to\infty} T_s = \lim_{s\to\infty} - \sum_{k=1}^{s} a_{q_k} = \infty .$$

D'après le théorème 1 on peut formuler ce

Théorème 2. — *Que la série à coefficient réels*

(9)
$$\sum_{1}^{\infty} a_n$$

soit convergente, mais non pas d'une façon absolue et que sa somme partielle de n premiers termes soit écrite sous la forme (8). *S'il existe une telle suite de nombres* $\{\lambda_n\}$ $\{\lambda_n > 1\}$ *que la suite*

(10a)
$$\{\alpha_n\} \equiv \left\{ \frac{a_{p_r}}{-a_{q_s}} \prod_{k=r}^{s-1} (1 - 1/\lambda_k) \right. \qquad \text{pour } r \leqslant s-1,$$

ou la suite

(10b)
$$\{\alpha_n\} \equiv \left\{ \frac{a_{p_r}}{-a_{q_s}} \left[\prod_{k=s}^{r-1} (1 - 1/\lambda_k) \right]^{-1} \right. \qquad \text{pour } s \leqslant r-1$$

ait un nombre fini de points d'accumulation dans l'intervalle

(11)
$$0 < l = \varliminf_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \alpha_n = L < \infty$$

et que

(12)
$$\begin{cases} \lambda_r a_{p_r} \to 0, \ r \to \infty ; \ \lambda_s a_{q_s} \to 0, \ s \to \infty ; \\ 0 < \varliminf \dfrac{a_{p_r}}{-a_{q_s}} \dfrac{\lambda_s (\lambda_r - 1)}{\lambda_r (\lambda_s - 1)} \leqslant \varlimsup \dfrac{a_{p_r}}{-a_{q_s}} \dfrac{\lambda_s (\lambda_r - 1)}{\lambda_r (\lambda_s - 1)} < \infty , \end{cases}$$

alors la suite

$$s_n = \sum_{1}^{n} a_k$$

est bornée. Dans le cas spécial la série (9) *sous ces conditions converge si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = C \quad (0 < C < \infty)$$

ou bien si la différence

$$a_{p_r} + a_{q_r}$$

conserve toujours le même signe mais sous condition que la suite (10a) *ou* (10b) *satisfait la condition* (11).

Si l'on envisage la série alternative semi-convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \qquad (a_n \to 0,\ n \to \infty)$$

elle converge, d'après le théorème 2, lorsque

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = C \qquad (1 \leqslant C < \infty).$$

Si la suite $\{a_n\}$ décroît d'une façon monotone, alors $C = 1$.

LITERATURE

[1] L. Karadžić: *Prilozi proučavanju nekih problema iz teorije redova i jednoznačnih analitičkih funkcija pomoću geometije Lobačevskog.* Publikacije Elekrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika, № 42 (1960), Beograd.

Résumé

JEDAN STAV KOJI SE ODNOSI NA SEMIKONVERGENTNE REDOVE

Lazar Karadžić

Koristeći se geometrijom Lobačevskog i rezultatima iz rada [1] na lak se način dolazi do slijedećeg stava:

Neka članovi nizova $\{S_m\}$ *i* $\{T_n\}$ *zadovoljavaju uslov* (1). *Ako egzistira takav niz brojeva* $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n > 1)$ *da bi niz* (2) *imao konačan broj tačaka nagomilavanja u intervalu* (3) *i da bi se imalo* (4), *tada je niz* $\{T_{n+dn} - S_n\}$ *ograničen. U specijalnom slučaju ovaj niz konvergira ako se ima* (5) *ili ako je razlika*

$$(T_m - T_{m-1}) - (S_m - S_{m-1})$$

stalno pozitivna ali pod uslovom da su relacije (3) *i* (4) *zadovoljene.*

Prema ovom stavu može se formulisati slijedeći stav:

Neka bude red (9) *sa realnim članovima semikonvergentan i neka bude njegova parcijalna suma od n prvih članova napisata u obliku* (8). *Ako egzistira takav niz brojeva da bi niz* (10a) *ili niz* (10b) *imao konačan broj tačaka nagomilavanja u intervalu*

$$0 < l = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \alpha_n = L < \infty,$$

i da bi se imala relacija (12), *tada je niz* $s_n = \sum_{k+1}^{n} \alpha_k$ *ograničen. U specijalnom slučaju red* (9) *pod ovim uslovima konvergira ako je* C $(0 < C < \infty)$ *ili ako je razlika* $a_{p_r} + a_{q_s}$ *stalno istog znaka ali pod uslovom da niz* (10a) *ili* (10b) *zadovoljava uslov* (11).