PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA - SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 56 (1961)

SUR QUELQUES PROCÉDÉS DE SOMMABILITÉ

Lazar Karadžić

Dans le travail [2] l'auteur a démontré comment on peut, au moyen de la géométrie de Lobatchewsky, illustrer le procédé de sommabilité des séries à termes positifs. Le présent travail décrit comment on peut, à l'aide de cette même géométrie, illustrer le procédé de sommabilité d'une suite à termes positifs.

Envisageons une série fonctionnelle

(1) $$f(t) = \sum_1^{\infty} s_n u_n(t)$$

où

(2) $$0 < s_n < M; \; 0 < u_n(t) < 1, \; t \in (0, \infty) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Lorsqu'on écrit cette série sous la forme

(1 a) $$f(t) = M \sum_1^{\infty} \frac{s_n}{M} \left(1 - e^{lg\,(1-u_n(t))}\right)$$

il existe alors, évidemment, dans le plan de Lobatchewsky une suite de points $\{M_n\}$ selon laquelle cette série a été formée (2). Cette série converge sans tenir compte du fait si la suite $\{s_n\}$, qui satisfait à la condition (2) est convergente ou n'est pas convergente, si la suite

$$\left\{ \frac{s_n}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} \left(1 - u_k(t)\right)} \right\}, \qquad t \in (0, \infty)$$

est bornée (2). Il s'ensuit de là, compte tenu de la condition (2), que la série (1) converge toujours si

(3) $$0 < \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - u_k(t)\right) < 1, \qquad t \in (0, \infty).$$

La convergence de cette série dépend de la convergence de la suite $\{s_n\}$, dont les termes satisfont à la condition (2), uniquement dans le cas lorsque $t \to \infty$ et que

$$\lim_{t \to \infty} u_n(t) = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(4) $$\lim_{t \to \infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - u_k(t)\right) = 1.$$

C'est évident, car alors la distance entre les arcs limites: $\frac{s_n}{M}$ thv_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ tend vers le zéro. Donc, *si la suite* $\{s_n\}$ *converge et si les conditions* (3) *et* (4) *sont satisfaites, alors*

$$\lim_{t\to\infty}\sum_1^\infty s_n u_n(t) = \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Pourtant, si

$$\lim_{t\to\infty}\sum_1^\infty s_n u_n(t) = s$$

on ne peut pas toujours déduire également la convergence de la suite $\{s_n\}$. Afin d'être à même de tirer la conclusion inverse nous nous servirons de la suite de parallèles $x=\{c_n\}$ des droites l_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ qui sont tracées à travers la suite susmentionée de points $\{M_n\}$ selon l'axe x. Si cette suite converge, il résulte alors de la relation

$$\frac{s_n}{\prod\limits_{k=2}^{n=1}\Big(1-u_k(n)\Big)} = e^{c_n} \qquad (t=n) \tag{5}$$

aussi la convergence de la suite $\{s_n\}$. La suite $\{c_n\}$ converge si la série

$$\sum_1^\infty (c_{n+1}-c_n) \tag{6}$$

converge également.

De la relation (5) il résulte

$$c_n - c_{n-1} = -lg\frac{s_n}{s_{n-1}}\Big(1-u_{n-1}(n)\Big), \quad n=1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Par conséquent, le reste de la série (6) peut être écrit sous la forme

$$\sum_{k=n+1}^\infty (c_k-c_{k-1}) = -\sum_{k=n+1}^\infty \lg P_k\Big(1-u_{k-1}(n)\Big)$$

$$\left(P_k=\frac{s_{k-1}}{s_k}=O\ (1),\ n\to\infty\right).$$

Comme, d'après (4)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^\infty \lg\Big(1-u_{k-1}(n)\Big)=0,$$

il est, dans ce cas-ci

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^\infty \lg p_k\Big(1-u_{k-1}(n)\Big)=0.$$

Il s'ensuit de là que le reste de la série (6) est une suite-nulle c. à d.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^\infty (c_k-c_{k-1})=0.$$

La série (6) est, donc, convergente lorsque

$$c_n - c_{n-1} = O\left(\lg\left(1 - u_{n-1}(n)\right)\right), \qquad n \to \infty, \tag{8}$$

et lorsqu'elle est convergente, la suite

$$c_n = c_1 + (c_2 - c_1) + \ldots + (c_n - c_{n-1})$$

est également convergente.

De (7) et (8) il résulte

$$\frac{c_n - c_{n-1}}{\lg\left(1 - u_{n-1}(n)\right)} = \frac{\lg\left(1 + \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n}\right)}{\lg\left(1 - u_{n-1}(n)\right)} - 1 = \frac{s_n - s_{n-1}}{u_{n-1}(n)} - 1 = O(1), \; n \to \infty.$$

De là, de la sommabilité de la suite $\{s_n\}$ selon le procédé susmentionné, on peut conclure également sa convergence, si cette condition est satisfaite. Si la suite a la forme

$$s_n = \sigma_n{}' - \sigma_n{}'' + i\,(\tau_n{}' - \tau_n{}'') \qquad (\sigma_n{}', \sigma_n{}'', \tau_n{}', \tau_n{}'' \geqslant 0)$$

il résulte aussi sa convergence, si elle est sommable selon le procédé ci-dessus et si

$$\frac{s_n - s_{n-1}}{u_{n-1}(n)} = O(1), \quad n \to \infty,$$

c. à d. si les suites

$$\left\{\frac{\sigma_n{}' - \sigma_n{}'_{-1}}{u_{n-1}(n)}\right\}, \; \left\{\frac{\sigma_n{}'' - \sigma_n{}''_{-1}}{u_{n-1}(n)}\right\}, \; \left\{\frac{\tau_n{}' - \tau_n{}'_{-1}}{u_{n-1}(n)}\right\}, \; \left\{\frac{\tau_n{}'' - \tau_n{}''_{-1}}{u_{n-1}(n)}\right\}$$

sont bornées.

D'après ce qu'on vient d'exposer, on peut formuler ce

Théorème — *Si les termes de la suite fonctionnelle $\{u_n(t)\}$ satisfont à la condition*

$$0 < u_n(t) < 1, \qquad t \in (0, \infty), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

et aux conditions (3) et (4), il résulte alors, de la sommabilité de la suite $\{s_n\}$ d'après le procédé

$$\sum_1^\infty s_n u_n(t)$$

la convergence de la suite $\{s_n\}$ lorsque la condition de la convergence

$$s_n - s_{n-1} = O\left(u_{n-1}(n)\right), \qquad n \to \infty,$$

est satisfaite.

Ainsi, par exemple, de la convergence des entourages arithmétiques élargis

$$\frac{p_0 s_0 + p_1 s_1 + \ldots + p_n s_n}{P_n} = s, \qquad n \to \infty$$

$$\left(P_n = \sum_0^n p_k \to \infty, \qquad n \to \infty\right)$$

il résulte la convergence de la suite $\{s_n\}$, si la condition de la convergence

$$s_n - s_{n-1} = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right), \qquad n \to \infty,$$

est satisfaite.

De même, de ce même théorème il résulte la convergence de la suite $\{s_n\}$ si elle est sommable selon le procédé

$$e^{-x} \sum_0^\infty s_n \frac{x^n}{n!}$$

lorsque la condition de la convergence

$$s_n - s_{n-1} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad n \to \infty,$$

est satisfaite [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood: *Theorems concerning the Summability of Series by Borel's exponential Method.* Rendic. Circ. Mat. Palermo, 41 (1916).

[2] L. Karadžić — *Prilozi proučavanju nekih problema iz teorije redova i jednoznačnih analitičkih funkcija pomoću geometrije Lobačevskog.* Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika, № 42 (1960), Beograd.

Résumé

O NEKIM POSTUPCIMA ZBIRLJIVOSTI

Lazar Karadžić

U ovom radu je prikazato kako se pomoću geometrije Lobačevskog može ilustrovati postupak zbirljivosti nekog niza sa pozitivnim članovima. Tako, koristeći se rezultatima iz rada [2], dolazi se do slijedećeg stava:

Ako članovi funkcionalnog niza $\{u_n(t)\}$ *zadovoljavaju uslov*

$$0 < u_n(t) < 1, \qquad t \in (0, \infty), \ n = 1, 2, 3 \ldots,$$

i uslove (3) *i* (4), *tada iz zbirljivosti niza* $\{s_n\}$ *po postupku*

$$\sum_1^\infty s_n u_n(t)$$

slijedi konvergencija niza $\{s_n\}$ *kada je uslov konvergencije*

$$s_n - s_{n-1} = O\left(u_{n-1}(n)\right), \qquad n \to \infty$$

zadovoljen.