PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 55 (1961)

CERTAINS RÉSULTATS SE RAPPORTANT AUX SÉRIES À TERMES CONSTANTS

Lazar Karadžić

Envisageons deux séries divergentes

$$(1) \qquad \sum_1^\infty a_n b_n \quad \text{et} \quad \sum_1^\infty a_n' b_n' \qquad (0 < a_n, a_n', b_n, b_n' < 1).$$

Lorsqu'elles sont écrites sous la forme

$$(1a) \qquad \sum_1^\infty a_n (1 - e^{lg\,(1-bn)}) \quad \text{et} \quad \sum_1^\infty a_n' (1 - e^{lg\,(1-b_n')}),$$

il est évident que chez de telles séries les suites

$$\left\{ \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (1-b_k)} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{a_n'}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (1-b_k')} \right\}$$

divergent [3], c. à d. deviennent illimitées du côté droit. Aux séries (1) resp. (1a) correspondent respectivement les suites de points $\{M_n\}$ $\{M_n'\}$ dans le plan de Lobatchewsky dont les parallèles a l'axe x possèdent également des parallèles respectivement $x = c_n$ et $x = c_n'$, [3]. Les suites $\{c_n\}$ et $\{c_n'\}$ sont divergentes et illimitées. La condition

$$(2) \qquad 0 < \varliminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n'} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-b_k'}{1-b_k} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n'} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-b_k'}{1-b_k} < \infty$$

nous montre que la suite $\{c_n - c_n'\}$ satisfait à la condition

$$(3) \qquad c_n - c_n' = O(1), \qquad n \to \infty\,.$$

Les sommes partielles des séries (1), c. à d. les sommes:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k \ (1 - e^{lg\,(1-bk)})$$

et

$$s_n' = \sum_{k=1}^n a_k' b_k' = \sum_{k=1}^n a_k' \ (1 - e^{lg\,(1-b_k')}),$$

représentent du point de vue géométrique deux surfaces. Ainsi, par exemple, la surface s_n est limitée par l'axe x, les arcs limites

$$a_1 = \text{th}\, u_0 \qquad \text{et} \qquad a_n\, e^{lg\,(1-b_n))} = e^{lg\,(1-b_n)}\, \text{th}\, u_{n-1}$$

et les segments des parallèles à l'axe x ainsi que par les segments des arcs limites: $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$. Donc, les arcs limites:

$$a_n\,(1-b_n) = e^{lg\,(1-b_n)}\, \text{th}\, u_{n-1}$$

et

$$a_n'\,(1-b_n') = e^{lg\,(1-b_n')}\, \text{th}\, u_n'{}_{-1}$$

sont les derniers arcs limites qui limitent respectivement les surfaces s_n et s_n'. Ces arcs limites se trouveront à une distance finie pour chaque n lorsque les conditions (3) resp. (2) et

$$0 < \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n\,(1-b_n)}{a_n'\,(1-b_n')} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n\,(1-b_n)}{a_n'\,(1-b_n')} < \infty$$

sont remplies. De là il est facile de déduire que: 1) la surface $s_n - s_n'$ restera bornée, lorsque $n - \infty$, lorsque la condition $a_n \to 0,\ n\to\infty$ et $a_n' \to 0,\ n\to\infty$ remplie et 2) que

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_n') = s$$

lorsque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n'} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-b_k'}{1-b_k} = C \quad (0 < C < \infty)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n\,(1-b_n)}{a_n'\,(1-b_n')} = C' \quad (0 < C' < \infty).$$

Le reste de la série $\sum (a_n b_n - a_n' b_n')$, donc, dans le présent cas est soit borné ou bien tend vers le zéro.

D'après ce que nous venons d'exposer, on peut formuler ce

Théorème — *Si les termes des séries*

$$\sum_1^\infty a_n b_n \qquad \text{et} \qquad \sum_1^\infty a_n' b_n'$$

satisfont aux conditions

$$0 < a_n < 1; \qquad a_n \to 0,\ n\to\infty; \qquad 0 < b_n < 1;$$
$$0 < a_n' < 1; \qquad a_n' \to 0,\ n\to\infty; \qquad 0 < b_n' < 1;$$

$$0 < \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n\,(1-b_n)}{a_n'\,(1-b_n')} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n\,(1-b_n)}{a_n'\,(1-b_n')} < \infty,$$

et si la suite

$$\{\alpha_n\} \equiv \left\{\frac{a_n}{a_n'} \prod_{k=n}^{n-1} \frac{1-b_k'}{1-b_k}\right\}$$

a un nombre fini de points d'accumulation dans $[l, L]$ $(0 < l = \underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n,\ L = \overline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n < \infty)$

la suite

$$\sum_1^n (a_k b_k - a_k' b_k')$$

est alors bornée. Dans le cas spécial la série

$$\sum_{n}^{\infty} (a_n b_n - a_n' b_n')$$

sous ces conditions converge lorsque

$$a_n b_n - a_n' b_n' > 0, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

ou que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n'} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-b_k'}{1-b_k} = C \qquad (0 < C < \infty).$$

Ce théorème peut être appliqué aux séries divergentes

$$(4) \qquad \sum_{1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0) \qquad \text{et} \qquad \sum_{1}^{\infty} v_n \quad (v_n > 0)$$

lorsqu'on les écrit sous la forme

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{u_n}{\lambda_n} \lambda_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{1}^{\infty} v_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{v_n}{\lambda_n} \lambda_n$$

et que l'on pose:

$$(5) \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{u_n}{\lambda_n} \to 0, \quad n \to \infty \quad \left(0 < \dfrac{u_n}{\lambda_n} < 1\right); \\ 0 < b_n = b_n' = \lambda_n < 1; \quad a_n' = \dfrac{v_n'}{\lambda_n} \to 0, \quad n \to \infty \quad \left(0 < \dfrac{v_n}{\lambda_n} < 1\right). \end{cases}$$

D'après le théorème ci-dessus on peut formuler le résultat suivant.

S'il existe une telle suite de nombres positifs $\{\lambda_n\}$ *qui satisfasse, avec les termes des séries divergentes* (4), *à la condition* (5) *et si la suite*

$$\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$$

est bornée, avec un nombre fini de points d'accumulation dans l'intervalle

$$0 < 1 = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = L < \infty,$$

alors la suite

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} (u_k - v_k) \right\}$$

est bornée. Dans le cas spécial la série

$$\sum_{1}^{\infty} (u_n - v_n)$$

sous ces conditions converge lorsque

$$u_n - v_n \geqslant 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ou lorsque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = C \qquad (0 < C < \infty).$$

Ainsi, par exemple, les séries:

$$\sum_1^\infty\left(\frac{c_n}{r_{n-1}}-\frac{c_n'}{r_n'{}_{-1}}\right)\qquad\left(r_{n-1}=\sum_{k=n}^\infty c_k,\ r_n'{}_{-1}=\sum_{k=n}^\infty c_k'\right)\tag{6}$$

et

$$\sum_1^\infty\left(\frac{d_n}{D_n}-\frac{d_n'}{D_n'}\right)\qquad\left(D_n=\sum_1^n d_k,\ D_n'=\sum_1^n d_k'\right),\tag{7}$$

où sont, d'après Abel [1], les séries:

$$\sum_1^\infty\frac{d_n}{D_n}\quad\text{et}\quad\sum_1^\infty\frac{d_n'}{D_n'}\qquad(d_n>0,\ d_n>0)$$

divergentes, et d'après Dini [2], les séries:

$$\sum_1^\infty\frac{c_n}{r_{n-1}}\qquad\text{et}\qquad\sum_1^\infty\frac{c_n'}{r_n'{}_{-1}}$$

$$(r_{n-1}\to 0,\ n\to\infty\ ;\qquad r_n'{}_{-1}\to 0,\ n\to\infty)$$

aussi divergentes, convergent si

$$\begin{cases}\dfrac{c_n}{r_{n-1}}-\dfrac{c_n'}{r_{n-1}}\geqslant 0\\[2mm] \dfrac{d_n}{D_n}-\dfrac{d_n'}{D_n'}\geqslant 0,\quad n=1,2,3,\ldots\end{cases}\tag{8}$$

et

$$0<\varliminf_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_n'}\frac{r_n'{}_{-1}}{r_{n-1}}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_n'}\frac{r_n'{}_{-1}}{r_{n-1}}<\infty,$$

$$0<\varliminf_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_n'}\frac{D_n'}{D_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_n'}\frac{D_n'}{D_n}<\infty.$$

Si

$$0<\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_n'}\frac{r_n'{}_{-1}}{r_{n-1}}<\infty\quad\text{et}\quad 0<\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_n'}\frac{D_n'}{D_n}<\infty\tag{9}$$

les séries (6) et (7) sont alors convergentes même sans la condition (8).

De (9) il s'ensuit ce résultat:

Si les termes des suites $\{s_n\}$ et $\{s_n'\}$ satisfont aux conditions:

$$s_n\to 0,\ n\to\infty\quad\text{et}\quad s_n'\to 0,\ n\to\infty,$$

ou

$$s_n\to\infty,\ n\to\infty\quad\text{et}\quad s_n'\to\infty,\ n\to\infty,$$

$$0<\lim_{n\to\infty}\frac{s_n-s_{n+1}}{s_n'-s_n'{}_{+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{s_n'}<\infty$$

$$(s_n>0,\ s_n'>0,\ n=1,2,3,\ldots)$$

alors la série

$$\sum \left(\frac{s_n - s_{n+1}}{s_n} - \frac{s_n' - s_{n+1}'}{s_n'} \right)$$

converge.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Abel: *Oeuvres*, II, p. 107.

[2] U. Dini: *Sulle serie a termini positivi.* Univ. Toscana, 9 (1867).

[3] L. Karadžić: *Prilozi proučavanju nekih problema iz teorije redova i jednoznačnih analitičkih funkcija pomoću geometrije Lobačevskog.* Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika, № 42 (1960), Beograd.

Résumé

NEKI REZULTATI KOJI SE ODNOSE NA REDOVE SA KONSTANTNIM ČLANOVIMA

Lazar Karadžić

Koristeći se rezultatima iz rada [3] dokazuje se pomoću geometrije Lobačevskog slijedeći

Stav — *Ako članovi redova*

$$\sum_1^\infty a_n b_n \quad \text{i} \quad \sum_1^\infty a_n' b_n'$$

zadovoljavaju uslove:

$$0 < a_n < 1;\ a_n \to 0,\ n \to \infty;\ 0 < b_n < 1;$$

$$0 < a_n' < 1;\ a_n' \to 0,\ n \to \infty;\ 0 < b_n' < 1;$$

$$0 < \varliminf_{n \to \infty} \frac{a_n (1 - b_n)}{a_n' (1 - b_n')} \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \frac{a_n (1 - b_n)}{a_n' (1 - b_n')} < \infty ,$$

i ako niz

$$\{\alpha_n\} \equiv \left\{ \frac{a_n}{a_n'} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 - b_k'}{1 - b_k} \right\}$$

ima u intervalu

$$0 < l = \varliminf_{n \to \infty} \alpha_n \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \alpha_n < \infty$$

konačan broj tačaka nagomilavanja, tada je niz

$$\sum_1^n (a_k b_k - a_k' b_k')$$

ograničen. U specijalnom slučaju red

$$\sum_{1}^{\infty} (a_n b_n - a_n' b_n')$$

pod ovim uslovima konvergira kada je

$$a_n b_n - a_n' b_n' > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ili kada je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_n'} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 - b_k'}{1 - b_k} = C \qquad (0 < C < \infty).$$

Iz ovog stava sleduju rezultati:

Ako egzistira takav niz pozitivnih brojeva $\{\lambda_n\}$ *koji bi sa članovima divergentnih redova* (4) *zadovoljavao uslov* (5) *i ako je niz* $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$ *ograničen i to sa konačnim brojem tačaka nagomilavanja u intervalu*

$$0 < l = \underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} \leqslant \overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} < \infty,$$

tada je niz

$$\left\{\sum_{1}^{n} (u_k - v_k)\right\}$$

ograničen. U specijalnom slučaju red

$$\sum_{1}^{\infty} (u_n - v_n)$$

pod ovim uslovima konvergira kada je $u_n - v_n \geqslant 0 \quad (n = 1,2,3, \ldots)$ *ili kada je*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = C \qquad (0 < c < \infty).$$

Ako članovi nizova $\{s_n\}$ *i* $\{s_n'\}$ *zadovoljavaju uslove:*

$$s_n \to 0, \ n \to \infty \quad \text{i} \quad s_n' \to 0, \ n \to \infty,$$

li

$$s_n \to \infty, \ n \to \infty \quad \text{i} \quad s_n' \to \infty, \ n \to \infty;$$

$$0 < \lim_{n \to \infty} \frac{s_n - s_{n+1}}{s_n' - s_{n+1}'} = \lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{s_n'} < \infty,$$

$$(s_n > 0, \ s_n' > 0, \ n = 1,2,3, \ldots),$$

tada red

$$\sum \left(\frac{s_n - s_{n+1}}{s_n} - \frac{s_n' - s_{n+1}'}{s_n'} \right)$$

konvergira.