PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 44 (1960)

SUR LA THÉORIE CANONIQUE DES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES

B. M. Okiljević

(Reçu le 10 juillet 1960)

INTRODUCTION

Sophus Lie introduit la notion d'une transformation infinitésimale de deux différentes manières pour intégrer les équations différentielles ordinaires. Dans ce but il généralise les études de H. Abel sur les propriétés des racines des équations algébriques. Suivant une autre voie, tout à fait originale, et se servant d'une nouvelle théorie mathématique générale sur les groupes des transformations continues, théorie inventée par lui à cet effet, S. Lie généralise les méthodes déjà connues pour l'intégration des équations différentielles ordinaires. Les oeuvres complètes de S. Lie [1] contiennent sa correspondance détaillée avec son ami A. Mayer, où l'on voit combien d'efforts S. Lie avait consacrés à ce travail, sans être toutefois complètement satisfait des résultats acquis, désespéré de ne pas pouvoir atteindre le but définitif.

En 1887, Camille Jordan exposa d'une manière succincte et très attrayante, dans son »Cours d'Analyse de l'École Polytechnique«, la théorie des transformations infinitésimales, indépendamment de la méthode des groupes des transformations continues. De cette manière C. Jordan a beaucoup simplifié le problème posé sur les transformations infinitésimales et leurs applications à l'intégration des équations différentielles.

Peut-être que c'est en réplique que S. Lie, l'année suivante, en 1888, publia son premier volume »Theorie der Transformationsgruppen« d'une nouvelle et volumineuse édition en trois tomes, en collaboration avec F. Engel. Le premier volume cité traite des transformations infinitésimales fondées sur les notions des groupes continus de transformations et d'une suite de leurs propriétés exposées d'une manière très longue et compliquée. Il suffit de remarquer que ce livre contient 632 pages, impliquant 114 théorèmes distincts. Deux années plus tard parut le second tome, consacré aux transformations de contact, et quelque temps après fut publié le troisième volume sur les structures des groupes de transformations.

A. Mayer publia, de son côté, sa théorie des transformations infinitésimales, sans profiter de la théorie des groupes des transformations continues.

De cette manière, grâce à l'oeuvre de C. Jordan, une nouvelle orientation fut inaugurée dans l'étude des transformations infinitésimales, étude que A. Buhl et P. Appell ont développée. Ce dernier, auteur éminent, a mis en rapport étroit les recherches de C. Jordan avec les travaux antérieurs de J. Liouville et G. Königs. Enfin de nouveaux développements ont étés inaugurés par N. Saltykow, qui généralisa les derniers travaux cités. Camille Jordan contribua aux nouveaux progrès de la théorie considérée, en publiant dans son illustre Journal de Mathématiques pures et appliquées — 6^e série, t. I, Fasc. 1, 1905, le Mémoire de N. Saltykow »Études sur les transformations infinitésimales« se rapportant à la nouvelle théorie que l'on pouvait appeler »Théorie canonique des transformations infinitésimales«.

I. Théorie des transformations infinitésimales

Quoique la notion de transformation infinitésimale fut introduite par S. Lie sous le titre »Infinitesimale Berührungstransformation«, le symbole mathématique de cette transformation a été employé pour la première fois encore par Charpit, en 1784 [2], et dès lors tous les mathématiciens qui ont étudié les équations aux dérivées partielles, avant S. Lie, se sont servis toujours de ce symbole.

Considérons une équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$dy - Xdx = 0, \tag{1}$$

X désignant une fonction des variables x et y.

Le problème équivalent à l'intégration de l'équation (1) consiste dans l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue $f(x, y)$, à savoir:

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + X\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

où le symbole $X(f)$ représente, d'une manière abrégée, la première partie de l'équation linéaire aux dérivées partielles (2).

En désignant par f l'intégrale de cette dernière équation (2), l'équation

$$f(x,y) = C, \tag{3}$$

où C est une constante arbitraire, représente l'intégrale générale de l' équation différentielle ordinaire (1).

Si l'expression

$$U(f) \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{4}$$

ξ et η étant des fonctions de x et de y, vérifie la condition

$$X(U(f)) = AX(f), \tag{5}$$

où A est une fonction quelconque des variables x et y, S. Lie appelle $U(f)$ transformation infinitésimale de l'équation donnée (1) ou de (2).

En généralisant de différentes manières cette définition, S. Lie constitue une théorie des transformations infinitésimales des équations différentielles ordinaires exposée dans ses leçons citées plus haut avec collaboration de F. Engel, ainsi que dans une autre édition intitulée „Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekanten infinitesimalen Transformationen bearbeitet und herausgegeben v. Dr. Georg Scheffers, Leipzig, 1891."

Une seconde manière d'exposition [4] de la théorie en question, est fondée sur la définition de la transformation infinitésimale (4), qui, elle-même, représente une intégrale de l'équation (2) en même temps que l'intégrale f. C'est cette définition que C. Jordan avait pris comme point de départ dans ses études. L'avantage de cette dernière définition sur celle mentionnée en premier lieu est évidente. En effet, la seconde définition conduit à l'identité

$$X(U(f))=0. \tag{6}$$

La condition obtenue, d'après la formule (4), devient

$$\begin{aligned} X(U(f)) &\equiv X\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= X(\xi)\frac{\partial f}{\partial x}+\xi X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+X(\eta)\frac{\partial f}{\partial y}+\eta X\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= X(\xi)\frac{\partial f}{\partial x}+\xi\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+X\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)+X(\eta)\frac{\partial f}{\partial y}+\eta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+X\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Différentiant l'identité (2) par rapport aux variables x et y, on obtient respectivement les identités:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+X\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=0 \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+X\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}=0. \end{aligned} \tag{8}$$

L'élimination des dérivées partielles du second ordre des relations (7) et (8) produit, grâce au symbole (4), l'identité suivante:

$$X(U(f))\equiv X(\xi)\frac{\partial f}{\partial x}+[X(\eta)-U(X)]\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

En substituant dans cette identité la valeur de la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ définie par l'identité (2), on obtient l'identité définitive:

$$X(U(f))\equiv[X(\eta)-XX(\xi)-U(X)]\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{9}$$

Comme on a $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$, l'identité (9) donne les coefficients de la transformation (4) vérifiant la condition suivante:

$$X(\eta)-XX(\xi)-U(X)=0. \tag{10}$$

On démontre aisément le théorème inverse, à savoir:
La condition (9) est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour que l'expression (4) définisse une transformation infinitésimale de l'équation considérée (1).

En effet, si ξ et η vérifient identiquement la relation (10), alors la condition (9) est identiquement satisfaite et, par conséquent, la condition (6) existe, de sorte que l'expression (4) représente la transformation infinitésimale des équations (1) et (2).

La condition obtenue (10) s'écrit sous la forme développée

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}+X\frac{\partial \eta}{\partial y}=\xi\frac{\partial X}{\partial x}+\eta\frac{\partial X}{\partial y}+XX(\xi). \tag{11}$$

Une des fonctions η ou X étant donnée, l'équation (11) représente une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue, soit η soit X.

Le résultat obtenu est fort important. Considérons $\xi\,(x, y)$ comme une fonction donnée de x et y; l'équation obtenue (11) va nous définir une des deux fonctions η ou X, l'autre étant connue. Par conséquent, si les fonctions ξ et X étaient données, on obtiendrait alors η en intégrant l'équation (11). L'intégration de cette dernière se ramène à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires:

$$dx=\frac{dy}{X}=\frac{d\eta}{\xi\dfrac{\partial X}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial X}{\partial y}+XX(\xi)}\,. \tag{12}$$

Les deux premiers membres de ce système représentent l'équation donnée (1). Désignons son intégrale par

$$\omega\,(x, y)=C_1, \tag{13}$$

et soit la seconde intégrale du système (12)

$$\Omega\,(x, y, \xi, \eta)=C_2, \tag{14}$$

C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires.

Par conséquent, l'intégrale générale du système (12) s' écrit de la manière suivante: $\Phi\,(\omega, \Omega)=0$, d'où provient

$$\Omega\,(x, y, \xi, \eta)=\Psi\,[\omega\,(x, y)], \tag{15}$$

Φ et Ψ désignant deux fonctions arbitraires. La relation obtenue (15) définit la forme générale de η, et par suite celle de la transformation infinitésimale de l'équation considérée (1) ou de (2). Il en résulte que l'une ou l'autre de ces dernières équations (1) ou (2) admettent un nombre indéfini de transformations infinitésimales. Or, toutes ces transformations s'obtiennent à l'aide de l'intégrale générale du système (12).

Considérons à présent la seconde hypothèse, où les deux coefficients ξ et η sont donnés; alors la relation (11) représente une équation linéaire aux dérivées partielles par rapport à la fonction inconnue X. L'expression de cette dernière s'obtient en intégrant le système d'équations différentielles ordinaires correspondantes:

(16) $$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dX}{X(\eta)-XX(\xi)}.$$

Envisageons les intégrales de ce système:

(17) $$\omega_1(x,y)=C'_1, \qquad \Omega_1(x,y,X)=C'_2,$$

C'_1 et C'_2 désignant deux constantes arbitraires.

La première des intégrales (17) implique les deux variables x et y et représente l'intégrale de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, dont le premier membre est défini par la transformation infinitésimale, qui s'écrit sous la forme symbolipue

$$U(f)=0.$$

L'intégrale de cette dernière équation, $\omega_1(x,y)$, s'appelle *invariant de la transformation donnée (4).*

Il résulte donc, dans la seconde hypothèse, que la forme générale des équations différentielles ordinaires de la forme (1), correspondant à la fonction X, est définie sous la forme

$$\Omega_1(x,y,X)=\Theta[\omega_1(x,y)],$$

où Θ représente une fonction arbitraire. Par conséquent la forme générale d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, qui admet la transformation infinitésimale (4), admet aussi la forme suivante

$$\Omega_1\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=\Theta[\omega_1(x,y)],$$

où Θ désigne une fonction arbitraire et ω_1 l'invariant de la transformation infinitésimale (4).

De cette manière on vient de résoudre le problème de la recherche des transformations infinitésimales admises par une équation différentielle ordinaire du premier ordre (1), ainsi que le problème des équations différentielles ordinaires du premier ordre qui admettent une transformation infinitésimale de la forme donnée (4).

Citons, à titre d'exemple, le problème qu'avait donné dans ses conférences le Professeur N. Saltykow en 1925, à Louvain. Il s'agit précisément de trouver toutes les équations différentielles ordinaires du premier ordre (1) admettant une transformation infinitésimale conforme

$$ax\frac{\partial f}{\partial x}+by\frac{\partial f}{\partial y},$$

a et b désignant deux coefficients constants.

On a dans cette hypothèse

$$\xi=ax,\ \eta=by,\ X(\cdots)\equiv\frac{\partial(\cdots)}{\partial x}+X\frac{\partial(\cdots)}{\partial y},$$

et le système (16) devient

$$\frac{dx}{ax}=\frac{dy}{by}=\frac{dX}{(a-b)X}. \tag{18}$$

Le système cité admet les deux intégrales suivantes: $\omega_1 \equiv \frac{x^b}{y^a}$, $\Omega_1 \equiv \frac{X^a}{x^{a-b}}$.

Donc, la forme générale des équations différentielles ordinaires du premier ordre correspondante admet la forme que voici:

$$y' = x^{1-\frac{b}{a}} \Phi\left(\frac{x^b}{y^a}\right),$$

Φ désignant une fonction arbitraire [5].

Le professeur V. A. Stekloff obtient un résultat analogue dans son excellent manuel „Fondements de la théorie de l'intégration des équations différentielles ordinaires" [6].

Partant de la définition immédiate de la transformation infinitésimale, V. A. Stekloff obtient nos équations (18).

La théorie exposée démontre que chaque équation différentielle ordinaire du premier ordre n'admet qu'une seule transformation infinitésimale qui peut être écrite de différentes manières, au moyen des intégrales du système (12).

Cependant S. Lie étudie de même les systèmes de plusieurs transformations infinitésimales, sans prêter attention à leurs propriétés.

II. Théorie canonique des transformations infinitésimales. Rapports entre les facteurs intégrants et les transformations infinitésimales

En considérant la méthode de Lie des transformations infinitésimales canoniques, C. Jordan a beaucoup simplifié leur théorie. A titre d'exemple, citons le rapport établi par S. Lie entre le facteur intégrant d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre et la transformation infinitésimale de cette dernière, rapport dont S. Lie était fier à juste titre.

Soit, en effet, une équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$y' = X, \tag{19}$$

X étant une fonction de x et y, et l'équation correspondante linéaire aux dérivées partielles d'une fonction inconnue $f(x, y)$

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + X\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{20}$$

Le théorème de S. Lie affirme:

Si la fonction f est une intégrale de l'équation (20) et si l'expression

$$z\frac{\partial f}{\partial y} \tag{21}$$

en est une autre, de sorte que l'on ait

(22) $$X\left(z\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0,$$

alors l'expression $\frac{1}{z}$ *est un facteur intégrant de l'équation (19).*

Pour démontrer le théorème cité, considérons l'identité que produit la relation (22), à savoir:

$$X(z)\frac{\partial f}{\partial y}+zX\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0.$$

Comme on a les identités:

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}+X\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+X\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

l'identité (22), que l'on vient de développer, devient actuellement:

$$\left[X(z)-z\frac{\partial X}{\partial y}\right]\frac{\partial f}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}\neq 0,\qquad X(z)-z\frac{\partial X}{\partial y}=0.$$

Grâce au symbole (20), il en résulte l'identité:

(23) $$\frac{\partial z}{\partial x}+X\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial y}z,$$

qu' il est aisé d'écrire, en divisant tous les membres par z^2, sous la forme

$$\frac{\partial\frac{1}{z}}{\partial x}+X\frac{\partial\frac{1}{z}}{\partial y}=-\frac{\partial X}{\partial y}\frac{1}{z}.$$

Il en résulte que $\frac{1}{z}$ est un facteur intégrant de l'équation (19).

S. Lie avait composé des théorèmes analogues sur les systèmes de deux équations à trois variables ramenant leur intégration à celle d'une équation à deux variables indépendantes et à une quadrature [3]. Or, il est aisé de donner une véritable généralisation du théorème de S. Lie sur un système de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre:

(24) $$dy_1=X_1dx,\qquad dy_2=X_2dx,$$

X_1 et X_2 étant des fonctions des variables x, y_1 et y_2, équivalentes à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre

(25) $$X(f)\equiv\frac{\partial f}{\partial x}+\sum_{i=1}^{2}X_i\frac{\partial f}{\partial y_i}.$$

Introduisons, à présent, la notion d'une transformation infinitésimale canonique. analogue à (21), en y entendant l'expression de la forme

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}\,; \tag{26}$$

qui devient l'intégrale de l'équation (25), en même temps que la fonction f en est une autre, tandis que z_1 et z_2 sont des coefficicnts dépendant de toutes les variables x, y_1 et y_2.

Cela étant, l'éxplession (26) doit vérifier identiquement la relation suivante:

$$X\left(z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} \right) = 0.$$

On en tire les équations pour définir les coefficients z_1 et z_2 de la manière suivante:

$$\sum_{k=1}^{2} X\left(z_k \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) = 0. \tag{27}$$

Développant les symboles $X\,(\cdot\cdot\cdot)$, on obtient successivement les identités:

$$\sum_{k=1}^{2} \left[z_k X\left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \right) + \frac{\partial f}{\partial y_k} X(z_k) \right] = \sum_{k=1}^{2} \left[z_k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial x} + \sum_{i=1}^{2} X_i \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} \right) + X(z_k) \frac{\partial f}{\partial y_k} \right]. \tag{28}$$

Or, en différentiant les identités (25) par rapport à y_k on en tire de nouvelles identités:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y_k} + \sum_{i=1}^{2} X_i \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial X_i}{\partial y_k} \frac{\partial f}{\partial y_i}\,.$$

Par conséquent les identités (28) deviennent

$$\sum_{k=1}^{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y_k} X(z_k) - \sum_{i=1}^{2} z_k \frac{\partial X_i}{\partial y_k} \frac{\partial f}{\partial y_i} \right] = 0\,. \tag{29}$$

Le second terme du premier membre de cette dernière identité contient la somme double

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} z_k \frac{\partial X_i}{\partial y_k} \frac{\partial f}{\partial y_i}. \tag{30}$$

Or, cette dernière va conserver sa valeur si l'on y change réciproquement les désignaticns des indices de sommation, k et i, et si ensuite on change l'ordre de sommation par rapport à ces indices, de sorte que la somme double considérée va s'écrire de la manière suivante:

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} z_i \frac{\partial X_k}{\partial y_i} \frac{\partial f}{\partial y_k},$$

et l'identité (29) va s'exprimer ainsi

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial y_k}\left[X(z_k)-\sum_{i=1}^{2} z_i \frac{\partial X_k}{\partial y_i}\right]=0. \tag{31}$$

Puisque l'identité (25) contient le terme $\frac{\partial f}{\partial x}$ qui ne figure pas dans l'identité (31), cette dernière ne peut pas être une conséquence de l'identité (25). Elle doit donc s'annuler identiquement de sorte que chacun des coefficients auprés de $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ doit être identiquement nul. De cette façon on obtient les identités (31) produisant deux nouvelles identités:

$$X(z_k)-\sum_{i=1}^{2} z_i \frac{\partial X_k}{\partial y_i}=0 \qquad (k=1,2). \tag{32}$$

Les identités obtenues produisent les relations pour définir les valeurs des coefficients z_k.

Le résultat qui s'exprime par les identités (32) est d'une grande importance, généralisant, comme on va le voir immédiatement, le théorème de S. Lie sur la transformation infinitésimale et le facteur intégrant d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

Signalons, d'abord, que les identités (32) généralisent, dans le cas du système des deux équations (24), l'identité (23) obtenue plus haut dans le cas considéré par S. Lie d'une seule équation différentialle ordinaire (19).

D'autre part le système obtenu (32) représente un cas particulier, pour le cas des deux équations (24) du système qu' avait obtenu N. Saltykow. Dans son mémoire ,,Étude sur les intégrales d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues" (Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. III, 5^e série, p.423, Paris 1897), et dans un autre ,,Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue" (Communications de la Société Mathématique de Kharkow, 2$^{-\text{ième}}$ série, tome X, № 1, Kharkow 1907), N. Saltykow a donné à ce système le nom de système généralisé de Charpit.

Le système (24) admet le système de deux facteurs intégrants, μ_1 et μ_2, que Jacobi avait définis de la manière suivante

$$\mu_1(dy_1-X_1dx)+\mu_2(dy_2-X_2dx)=df(x,y_1,y_2).$$

Il en résulte les relations:

$$\mu_1=\frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \mu_2=\frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}=-\mu_1X_1-\mu_2X_2. \tag{33}$$

Les formules obtenues définissent la fonction f comme une intégrale du système (24). En effet, substituant les deux premières valeurs (33), μ_1 et μ_2 dans la dernière équation (33), on a

$$X(f)\equiv\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial y_2}=0. \tag{34}$$

Or d'autre part, les relations (33), donnent:

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial y_2}=\frac{\partial \mu_2}{\partial y_1}$$

$$(35)\qquad \frac{\partial \mu_1}{\partial x}+X_1\frac{\partial \mu_1}{\partial y_1}+X_2\frac{\partial \mu_2}{\partial y_1}=-\frac{\partial X_1}{\partial y_1}\mu_1-\frac{\partial X_2}{\partial y_1}\mu_2$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial x}+X_1\frac{\partial \mu_1}{\partial y_2}+X_2\frac{\partial \mu_2}{\partial y_1}=-\frac{\partial X_1}{\partial y_2}\mu_1-\frac{\partial X_2}{\partial y_2}\mu_2 .$$

Les deux dernières relations, grâce à la première (35), produisent les identités:

$$(36)\qquad \frac{\partial \mu_1}{\partial x}+X_1\frac{\partial \mu_1}{\partial y_1}+X_2\frac{\partial \mu_1}{\partial y_2}=-\frac{\partial X_1}{\partial y_1}\mu_1-\frac{\partial X_2}{\partial y_2}\mu_2$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial x}+X_1\frac{\partial \mu_2}{\partial y_1}+X_2\frac{\partial \mu_2}{\partial y_2}=-\frac{\partial X_1}{\partial y_2}{}_1-\frac{\partial X_2}{\partial y_2}\mu_2 .$$

Il est aisé de démontrer le *théorème inverse*, c'est-à-dire: *chaque solution de l'équation* (34) *produit les facteurs intégrants du système* (24). En effet, l'équation (34), étant identiquement vérifiée par sa solution f, il en résulte de nouvelles identités par différentiation de l'identité (34) par rapport à la variable y_k:

$$(37)\qquad X\left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial Xi}{\partial y_k}\frac{\partial f}{\partial y_i}=0 \qquad (k=1,2).$$

En comparant les identités (36) avec les identités correspondantes (37), on démontre que les expressions:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1},\quad \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

sont respectivement les solutions des équations (36), à savoir:

$$\mu_1=\frac{\partial f}{\partial y_1},\qquad \mu_2=\frac{\partial f}{\partial y_2},$$

ce qui démontre le théorème formulé plus haut.

Cela étant, la transformation infinitésimale canonique (26) s'écrit

$$z_1\mu_1+z_2\mu_2$$

et généralise le théorème de S. Lie (21), qui s'exprime actuellement par le symbole $\sum_{s=1}^{2} z_s\mu_s$, z_s étant les coefficients de la transformation infinitésimale canonique, tandis que μ_s désignent les facteurs intégrants du système (24).

III. Propriétés des transformations infinitésimales canoniques

Le système obtenu (32) sert, en même temps, à résoudre les deux problèmes suivants:

1) Recherche des valeurs des coefficients z_k pour le système (24) ou bien pour l'équation (25);

2) Recherche des systèmes de la forme (24) ou de l'équation (25) qui admettent les transformations canoniques (26) aux coefficients donnés z_k.

La théorie exposée donne aussi la réponse concernant le nombre des transformations infinitésimales distinctes qu'admet le système correspondant (24). S. Lie n'avait jamais étudié la question des transformations infinitésimales distinctes admises par un système d'équations. Or, les conditions obtenues (32) ervent aussi à résoudre ce dernier problème.

Les rélations (32), qui représentent un systéme de Charpit généralisé, sont remarquables par leur structure, grâce à la répartition des quantités z_k ou des coefficients X_k que l'on considère séparément, les unes ou les autres, comme deux différents systèmes de variables.

En effet, ce système reste un système Charpit généralisé soit que l'on prenne comme variables inconnues les variables z_k ou bien les coefficients X_k.

Considérons, donc, d'abord le système des deux équations différentielles ordinaires (24), à deux coefficients donnés X_1 et X_2; il s'agit de trouver les deux coefficients, z_1 et z_2, de la transformation infinitésimale canonique (27).

Le système correspondant (32) s'écrit sous la forme développée:

$$\frac{\partial z_k}{\partial x}+X_1\frac{\partial z_k}{\partial y_1}+X_2\frac{\partial z_k}{\partial y_2}=\frac{\partial X_k}{\partial y_1}z_1+\frac{\partial X_k}{\partial y_2}z_2 \qquad (k=1,\ 2). \tag{38}$$

Le système d'équations différentielles ordinaires correspondant s'écrit

$$dx=\frac{dy_1}{X_1}=\frac{dy_2}{X_2}=\frac{dz_1}{\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{\partial X_1}{\partial y_i}z_i}=\frac{dz_2}{\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{\partial X_2}{\partial y_i}z_i}, \tag{39}$$

où les trois premiers membres représentent les deux équations considérées (24). Par conséquent le problème posé est équivalent au problème d'intégration des équations en question (24). Ce fait est analogue à celui de la théorie du facteur intégrant de L. Euler d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Donc, d'une manière analogue, la théorie étudiée des transformations infinitésimales pourrait être utile pour la recherche de certaines classes d'équations admettant les transformations en question d'un type défini. Dans ce but on devra de nouveau profiter des équations (32), où les fonctions z_k admettent certaines valeurs et l'on cherchera les systèmes de la forme (24) dont les coefficients X_1 et X_2 sont les fonctions inconnues. Pour les avoir on traitera les équations (32) sous la forme

$$\sum_{i=1}^{2} z_i\frac{\partial X_k}{\partial y_i}=\frac{\partial z_k}{\partial x}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial z_k}{\partial y_i}X_i \qquad (k=1,\ 2). \tag{40}$$

Le système correspondant d'équations différentielles ordinaires s'écrira alors:

$$\frac{dy_1}{z_1}=\frac{dy_2}{z_2}=\frac{dX_1}{X(z_1)}=\frac{dX_2}{X(z_2)}. \tag{41}$$

De cette manière on exprimera les valeurs des coefficients cherchés X_1 et X_2 comme fonctions de l'invariant de la transformation infinitésimale canonique.

Cas d'une équation différentielle ordinaire du second ordre.

Considérons une équation différentielle ordinaire du second ordre

$$y''=X(x,y,y'),$$

que l'on écrit aisément sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2}=X(x,y,y'). \tag{42}$$

Comme on a

$$\frac{dy}{dx}=y', \quad \frac{dy'}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

le rôle de deux fonctions inconnues vont jouer les variables y et y'. Par conséquent, le système correspondant à (24) s'écrit:

$$dy=y'\,dx, \qquad dy'=X(x,y,y')\,dx. \tag{43}$$

La transformation infinitésimale canonique correspondante admet alors la forme

$$z_1\frac{\partial f}{\partial y}+z_2\frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Les équations (32), qui servent pour définir les coefficients z_1 et z_2, deviennent actuellement:

$$X(z_k)=\frac{\partial z_k}{\partial x}+y'\frac{\partial z_k}{\partial y}+X\frac{\partial z_k}{\partial y'} \qquad (k=1,2), \tag{44}$$

et le système correspondant des équations différentielles ordinaires s'écrit:

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{dy'}{X}=\frac{dz_1}{z_1\frac{\partial X_1}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial X_1}{\partial y_2}}=\frac{dz_2}{z_1\frac{\partial X_2}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial X_2}{\partial y_2}}. \tag{45}$$

Rezime

O KANONIČKOJ TEORIJI INFINITEZIMALNIH TRANSFORMACIJA

Blažo Okiljević

U ranijem radu [5] autor je odredio opšti oblik transformacije običnih diferencijalnih jednačina drugog i višeg reda koje dopuštaju konformnu produženu i projektivnu infinitezimalnu transformaciju kao i sam način integraljenja ovih jednačina. U sadašnjem radu autor prilazi nizu novih problema, koje rešava primenom mnogo podesnije teorije kanoničkih infinitezimalnih transformacija. Tvorac osnove ove teorije je Camille Jordan.

Kod S. Lie-a nema dovoljno sistematike u izlaganju, ali u toku svog rada on vešto ređa razne partikularne probleme, ili proučava posebne sisteme diferencijalnih jednačina za koje postavlja specijalna pitanja. Na ovaj način S.Lie posmatra ili jednočlane infinitezimalne transformacije ili produžene infinitezimalne transformacije, uvodeći zato varijaciju izvoda. Za sistem diferencijalnih jednačina S. Lie uvodi jednočlane ili višečlane infinitezimalne transformacije, pri čemu on posmatra dve vrste infinitezimalnih transformacija — opšteg i kanoničkog oblika. Svaka od njih ima svoje osobine. Ove prve S.Lie vezuje za novu opštu teoriju grupa transformacija, što dovodi u izlaganju do još većih komplikacija. Težeći najopštijoj generalizaciji S.Lie posmatra obrasce transformacija u obliku beskrajnih redova.

Zbog navedenih različitih vrsta problema i zbog načina njihovih rešavanja, kao i zbog komplikovane simbolike, Lie-ove teorije su vrlo raznovrsne i složene. Stoga onaj ko radi u oblasti Lie-ovih istraživanja mora kritički da se odnosi prema njegovom načinu izlaganja.

Autor zastupa Jordan-ovu orijentaciju posmatranja infinitezimalnih transformacija i primenjuje njihov kanonički oblik. Time se opšta teorija infinitezimalnih transformacija mnogo uprošćava i oslobađa se Lie-ove teorije neprekidnih grupa transformacija, koje obiluju novim naknadnim pojmovima i problemima, neneophodnim, kao što je to lepo pokazao C. Jordan.

Zahvaljujući ovom izboru metode, autor je uspeo da iznese u najelementarnijem obliku osnovne teoreme S. Lie-a — o vezi njegove infinitezimalne transformacije sa Euler-ovim integrabilnim faktorom. On, dalje, ovu vezu neposredno generališe na sistem od dve obične diferencijalne jednačine prvog reda.

Drugi važan rezultat predstavlja uvođenje sistema Charpit-evih parcijalnih jednačina i njihovih generalizacija u teoriju infinitezimalnih transformacija, čime se postiže veća jednostavnost.

Ma da je S. Lie čitavu svoju teoriju zasnivao na Charpit-evom pojmu (Infinitesimale Berührungstransformation), ni S. Lie, ni njegovi sledbenici nisu poznavali Charpit-eve sisteme parcijalnih diferencijalnih jednačina, niti su se njima služili.

Ovaj nedostatak autor je potpuno otklonio i postigao je sistematsku jednostavnost u izlaganju teorije infinitezimalnih transformacija.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Lie:
Gesammelte Abhandlungen, Bd. V. S. 583-606.

[2] N. Saltykow:
Étude bibliographique sur le Mémoire inédit de Charpit, Bulletin des Sciences Mathématiques, 2e série, LIV, août 1930, Paris.

[3] S. Lie:
Mathematische Annalen, Bd. XI, 11, S. 512.

[4] C. Jordan:
Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, t. III, Paris 1915, Chapitre I, IV p.80.

[5] B. M. Okiljević:
Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, VI, 3-4 Beograd, 1954.

[6] V. A. Stekloff:
Fondements de la théorie de l'intégration des équations différentielles ordinaires, Moscou et Léningrad, 1927.