PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA – SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 40 (1960)

JEDAN STAV IZ TEORIJE REDOVA

Dragomir Ž. Đoković

(Primljeno 10 februara 1960)

S t a v. *Ako je* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *proizvoljan konvergentni red, uvek postoji neograničeni rastući niz pozitivnih brojeva* b_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$ *takav da je red* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ *takođe konvergentan.*

D o k a z. Označimo sa

$$S(p, q) = \sum_{i=p}^{q-1} a_i$$

otsečak konvergentnog reda $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Na osnovu opšteg *Cauchy*-evog kriterijuma konvergencije redova možemo tvrditi da postoji rastući niz prirodnih brojeva:

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_n, \ldots, \tag{1}$$

takav da za sve vrednosti p i q koje zadovoljavaju uslov

$$\nu_k \leqslant p < q$$

važi

$$|S(p, q)| < \frac{1}{2^{2k}}. \tag{2}$$

Formirajmo sada jedan niz pozitivnih brojeva

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots \tag{3}$$

koji ispunjava sledeća dva uslova:

1° Za $\nu_k \leqslant i < \nu_{k+1}$ važi nejednakost

$$2^{k-1} < b_i < 2^k;$$

2° Niz je monotono rastući.

Dokazaćemo da je pri tako izabranom nizu (3) red

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \tag{4}$$

konvergentan. Otsečke reda (4) označavaćemo sa $S'(p, q)$.

Ocenićemo prvo $|S'(p, q)|$ kada p i q zadovoljavaju uslov

$$v_k \leqslant p < q \leqslant v_{k+1}.$$

Kratkoće radi stavićemo

$$s_i = S(v_k, i) \qquad (i = v_k + 1,\ v_k + 2, \ldots, v_{k+1}),$$

$$s_{v_k} = 0.$$

Na osnovu *Abel*-ovog identiteta imamo:

$$|S'(p, q)| = \left|\sum_{i=p}^{q-1} a_i b_i\right| = \left|\sum_{i=p}^{q-1} (s_{i+1} - s_i) b_i\right|$$

$$= \left| s_q b_{q-1} - s_p b_p + \sum_{i=p}^{q-2} s_{i+1}(b_i - b_{i+1}) \right|.$$

Koristeći (2), biće dalje

$$|S'(p, q)| < \frac{1}{2^{2k}} \left\{ b_{q-1} + b_p + \sum_{i=p}^{q-2} (b_{i+1} - b_i) \right\} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2^{2k}} (b_{q-1} + b_p + b_{q-1} - b_p) < 2 \cdot \frac{1}{2^k}.$$

Uzmimo sada proizvoljan otsečak $S'(p, q)$ reda (4). Neka p i q zadovoljavaju nejednakosti:

$$v_r \leqslant p < v_{r+1},$$

$$v_s < q \leqslant v_{s+1},$$

$$p < q.$$

Sada možemo dati ocenu:

$$|S'(p, q)| = |S'(p, v_{r+1}) + S'(v_{r+1}, v_{r+2}) + \cdots + S'(v_{s-1}, v_s) + S'(v_s, q)| \tag{6}$$

$$\leqslant |S(p, v_{r+1})| + |S(v_{r+1}, v_{r+2}) + \cdots + |S'(v_{s-1}, v_s)| + |S'(v_s, q)|$$

$$< 2\left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^{r+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{2^s}\right)$$

$$< \frac{1}{2^{r-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{r-2}}.$$

Neka je $\varepsilon\,(>0)$ proizvoljno. Ako r izaberemo tako da bude $\frac{1}{2^{r-2}} < \varepsilon$, tada na osnovu (6) zaključujemo da će za svako p i q $(q > p \geqslant v_r)$ biti

$$|S'(p, q)| < \varepsilon.$$

Prema tome, red (4) je konvergentan i time je stav dokazan. Iz navedenog stava može se izvesti sledeća posledica:

Potreban i dovoljan uslov da bi red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ bio konvergentan je da se njegovi članovi mogu pretstaviti u obliku

$$a_i = \delta_i \cdot c_i$$

tako da bude

$$\delta_i > 0, \quad \delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \delta_3 \geqslant \cdots, \quad \lim_{i \to \infty} \delta_i = 0,$$

i da niz parcijalnih suma reda $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ bude ograničen.

Neophodnost navedenog uslova sleduje iz dokazanog stava, tj.

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i} a_i b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i c_i,$$

gde je

$$\delta_i = \frac{1}{b_i}, \quad c_i = a_i b_i.$$

Dovoljnost gornjeg uslova sleduje iz *Abel*-ovog kriterijuma konvergencije.

RÉSUMÉ

UNE PROPOSITION CONCERNANT LA THÉORIE DES SÉRIES

D. Ž. Đoković

Dans cette Note on démontre la proposition suivante:

Soit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ une série quelconque convergente; il existe alors une suite infinie ascendante des nombres positifs b_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ telle que la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ converge également.