PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SERIE: MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 38 (1960)

O JEDNOJ NOVOJ KLASI POLINOMA U TEORIJI SPECIJALNIH FUNKCIJA

Boško S. Tomić

(Primljeno 26 januara 1960)

1. Uvod

Niels Nielsen je u svojoj knjizi »*Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*« [1] (Paris, 1923, str. 28) uveo jedan specijalan dvostruki niz polinoma

$$A_\nu^n(\alpha)=\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^i\binom{n+1}{i}(\alpha+\nu-i)^n.$$

Ovi polinomi za $\alpha=0$ određuju jedan naročiti *Euler*-ov dvostruki niz brojeva, koje je *Euler* uveo u svojim »*Institutiones calculi differentialis*« [2] (Petrograd, 1755, str. 489—491).

Kao uopštenje *Nielsen*-ovih polinoma autor uvodi čitavu novu klasu polinoma, koja sadržava beskonačno mnogo dvostrukih nizova polinoma sa dva argumenta. Za svaki od ovih nizova polinoma daje funkciju generatrisu (4). Isto tako određuje funkciju generatrisu *Cesàro*-vih polinoma [3]. Dokazuje više različitih svojstava novouvedenih polinoma. Iz generatrise polinomâ ${}^\circ B_\nu^n(\alpha)$ (18), koju je autor uveo u svom radu »*Sur une classe des polynômes et sur les intégrales s'y rattachant*« [4] (Zagreb, 1954, *Glasnik*, str. 229—243), vidi se da niz polinoma $\{{}^\circ B_\nu^n(\alpha)\}$ čini osnovni niz cele novouvedene klase polinoma. Pomoću ove generatrise dolazi do svojih funkcija ${}^\circ p_n(\alpha, z)$ (24), koje su takođe od osnovnog značaja za celu uvedenu klasu polinoma. Uvodi integral (74) funkcijâ ${}^\circ p_n(\alpha, z)$ i iteracijom pomenutog integrala dolazi do funkcijâ ${}^k p_n(\alpha, z)$ i u vezi sa ovim funkcijama određuje graničnu vrednost (97) i asimptotske relacije (98), (99) i (100). Izvodi funkcionalnu jednačinu (106) za funkcije ${}^k p_n(\alpha, z)$ i iz ove dobija jedno vrlo značajno svojstvo (107) svojih polinoma ${}^k B_n^m(\alpha)$. Diferenciranjem funkcije generatrise osnovnog niza polinomâ dolazi do drugoga niza funkcijâ ${}^{-k}p_n(\alpha, z)$, daje funkcionalnu jednačinu (119) za ove funkcije i iz ove dobija, analogno svojstvu (107), jedno vrlo značajno svojstvo (121) polinomâ ${}^k A_n^m(\alpha)$. Nalazi takođe funkcionalne jednačine (53) i (54) kao i iz ovih izvedene za polinome sa dva argumenta. U vezi sa funkcijama ${}^{-k}p_n(\alpha, z)$ određuje zbir funkcionalnog reda (124) kao i zbirove funkcionalnih redova (125).

S obzirom na svojstva (107) i (121) dolazi do devetnaest nesvojstvenih trigonometriskih integrala. Određuje kompleksni integral (141) na osnovu koga pomoću *Fourier*-ove transformacije dolazi do svoja dva osnovna integrala (150) i (155). Daje rekurentnu integralnu formulu (158) na osnovu koje izvodi dalja četiri integrala (173), (175), (178) i (180). Namesto konačnog niza krivih (157), koji čini osnovu pomenutim integralima, uvodi beskonačan niz krivih (194) koji čini osnovu sledećoj grupi od osam integrala navedenih pod brojevima (189) do (196). Translacijom desne grane krivih (184) duž ose X dobija osnove (197) za sledeća dva integrala (204) i (206), a izmenom eksponenta n u $n+1$ kod pomenutog konačnog niza krivih (157) i translacijom desne grane ovih krivih duž ose X dolazi do niza krivih (209) koje čine osnovu integralima (213) i (215). Izmenom eksponenta n u $n+1$ i translacijama duž ose X i duž ose Y desne grane krivih (132) dolazi do krivih (220) koje čine osnovu integralima (236).

U vezi s tim što novouvedeni polinomi sadržavaju dva argumenta, autor takođe uvodi i *Bernoulli*-eve polinome sa dva argumenta (259), (260) i (261). Daje nov nesvojstveni integral (269) koji pretstavlja generatrisu *Bernoulli*-evih brojeva. Razlaže dve vrste *Bernoulli*-evih polinoma sa dva argumenta na polinome ${}^1A_\nu^n(\alpha, \beta)$ (262) odnosno na polinome ${}^\circ B_\nu^n(\alpha, \beta)$ (273). Dokazuje ravnomernu konvergenciju (254) nizova paralelnih sa glavnom dijagonalom u šemi (237) i za *Nielsen*-ove polinome uspostavlja formule (255) i (256).

2. Definicija jedne nove klase polinoma. Funkcije generatrise ovih polinoma.

Kao uopštenje *Nielsen*-ovih polinoma uvodimo novu klasu polinoma sa beskonačno mnogo novih dvostrukih nizova polinoma sa dva argumenta:

$$(1) \qquad {}^rA_\nu^n(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \binom{n+r}{i} (\alpha + (\nu - i)\beta)^n, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

$$(2) \qquad {}^rB_\nu^n(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \binom{n-r}{i} (\alpha + (\nu - i)\beta)^n, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Polinomi ove klase mogu se prikazati jedinstvenom formulom

$$(3) \qquad {}^{n+k}B_\nu^n(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \binom{-k}{i} (\alpha + (\nu - i)\beta)^n, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad n, \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Generatrisa novouvedenih polinoma glasi

$$(4) \qquad \frac{1}{(1-x)^k} \cdot \frac{e^{(1-x)\alpha z}}{1 - x e^{(1-x)\beta z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \{{}^kp_n(\alpha, \beta, z)\} x^n, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$|x| < 1, \; |z| < 1, \; |\beta z| < 1, \; |\alpha| < M$$

gde je

$$(5) \qquad {}^kp_n(\alpha, \beta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \{{}^kB_n^m(\alpha, \beta)\}.$$

Za $k=0$ imamo osnovni niz polinoma $\{{}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha,\beta)\}$ koji smo uveli na osnovu veze sa diferencijom

(6) $$\Delta_{0}^{p_h}(x+ph)^n \equiv D_p^n(x,h)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}(x+(p-i)h)^n$$

i to iz razloga što je

(7) $$D_n^n(x,h)=n!\,h^n,$$

a isto tako i

(8) $${}^{\circ}B_n^n(\alpha,\beta)=n!\,\beta^n.$$

Za $h=1$ upotrebićemo oznaku $D_p^n(x,1)\equiv D_p^n(x)$.

Na osnovu svojstva

(9) $${}^{\circ}B_{n+k}^{n}(\alpha,\beta)=n!\,\beta^n,\quad k=0,1,2,\ldots$$

prethodni razvoj (5) za $k=0$ postaje

(10) $${}^{\circ}p_n(\alpha,\beta,z)=\frac{1-(\beta z)^{n+1}}{1-\beta z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha,\beta)}{(n+k)!}z^{n+k}$$

gde ćemo staviti

(11) $$R_n(\alpha,\beta,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha,\beta)}{(n+k)!}z^{n+k}.$$

Uz uslov $|z|<1,|\beta z|<1,|\alpha|<M$ imamo

(12) $$R_n(\alpha,\beta,z)\to 0 \text{ kad } n\to\infty;$$

stoga je

(13) $$\lim_{n\to\infty}\{{}^{\circ}p_n(\alpha,\beta,z)\}=\frac{1}{1-\beta z} \text{ za } |z|<1,|\beta z|<1,|\alpha|<M$$

a na osnovu ove granične vrednosti u krajnjoj liniji dobija se

(14) $$\frac{{}^{k}p_{n+1}(\alpha,\beta,z)}{{}^{k}p_n(\alpha,\beta,z)}\to 1 \quad \text{kad } n\to\infty$$

uz uslov $|z|<1,|\beta z|<1,|\alpha|<M.$

3. Funkcija generatrisa osnovnoga niza polinoma. Granična vrednost niza funkcija $\{{}^{\circ}p_n(\alpha,z)\}$. Funkcije ${}^{-1}p_n(\alpha,z)$.

(15) Za $\beta=1$ pišemo ${}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha,1)\equiv{}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha)$

i u ovoj oznaci je

(16) $${}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha,\beta)=\beta^n\left\{{}^{\circ}B_{\nu}^{n}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right\},\quad \beta\neq 0.$$

Polinomi ${}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha,\beta)$ imaju između ostalih i ova svojstva

$${}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha,0)=\alpha^n(-1)^{\nu}\binom{n-1}{\nu},\quad {}^{\circ}B_{\nu}^{n}(0,\beta)=\{{}^{\circ}B_{\nu}^{n}(0)\}\,\beta^n,\quad {}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha,\alpha)=\{{}^{\circ}B_{\nu+1}^{n}(0)\}\alpha^n.$$

Za $\beta = 1$ stavljamo slično

(17) $$^\circ p_n(\alpha, 1, z) \equiv {}^\circ p_n(\alpha, z).$$

Za celu klasu novouvedenih polinoma (3) od osnovne je važnosti niz $\{^\circ B_\nu^n(\alpha)\}$. Funkcija generatrisa ovoga niza je

(18) $$G_\circ(\alpha, x, z) = \frac{e^{(1-x)\,\alpha\, z}}{1-xe^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^n z^m}{m!}\{^\circ B_n^m(\alpha)\},\ |x|<1,\ |z|<1.$$

Prethodno ćemo pokazati da je funkcija $e^{z(e^\alpha - 1)}$ funkcija generatrisa *Cesàro*-vih polinoma [3]

$$s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} St_\nu^n z^\nu = e^{-z}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}\nu^n$$

čiji su koeficijenti *Stirling*-ovi brojevi druge vrste

$$St_\nu^n = \frac{1}{\nu!}D_\nu^n(0).$$

Zaista je

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}s_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}e^{-z}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}\nu^n = e^{-z}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\nu^n = e^{-z}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}e^{\alpha\nu} = e^{z(e^\alpha - 1)}.$$

Stavljamo

$$e^{ze^\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}e^{\alpha\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}(e^\alpha - 1)^k$$

i transformišemo poslednji red u red po stepenima od $(e^\alpha - 1)$

(19) $$e^{ze^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}(e^\alpha - 1)^n\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{n}\frac{z^{n+\nu}}{(n+\nu)!}.$$

Taylor-ov red funkcije e^{ze^α} po stepenima od $(e^\alpha - 1)$ glasi

(20) $$e^{ze^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n e^z}{n!}(e^\alpha - 1)^n.$$

Iz poslednja dva razvoja sleduje

(21) $$q_n(z) \equiv \frac{z^n e^z}{n!} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{n}\frac{z^{n+\nu}}{(n+\nu)!}.$$

Stavljamo

(22) $$G_\circ(\alpha, x, z) \equiv \frac{e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\{^\circ p_n(\alpha, z)\}\,x^n\,;$$

ovaj red konvergira za $|x|<1,\ |z|<1,\ |\alpha|<M$ jer

(23) $$\frac{^\circ p_{n+1}(\alpha, z)}{^\circ p_n(\alpha, z)} \to 1 \text{ kad } n\to\infty$$

uz uslov $$|z|<1, \quad |\alpha|<M.$$

Koeficijenti ${}^{\circ}p_n(\alpha, z)$ razvoja (22) su funkcije oblika

$$(24) \qquad {}^{\circ}p_n(\alpha, z)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\frac{\{(\alpha+n-\nu)z\}^{\nu}}{\nu!}e^{\{(\alpha+n-\nu)z\}}, \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

Na osnovu razvoja (21) razvoj funkcije

$$(25) \qquad q_{\nu}\{(\alpha+n-\nu)z\}=\frac{\{(\alpha+n-\nu)z\}^{\nu}}{\nu!}e^{\{(\alpha+n-\nu)z\}}$$

glasi

$$(26) \qquad \frac{\{(\alpha+n-\nu)z\}^{\nu}}{\nu!}e^{\{(\alpha+n-\nu)z\}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu+k}{\nu}\frac{\{(\alpha+n-\nu)z\}^{\nu+k}}{(\nu+k)!}.$$

Razvijajući sve funkcije $q_{\nu}\{(\alpha+n-\nu)z\}$, $\nu=0, 1, 2, \ldots, n$ u izrazu (24) na način (26) dobijamo

$$(27) \qquad {}^{\circ}p_n(\alpha, z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\{{}^{\circ}B_n^m(\alpha)\}$$

gde je

$$(28) \qquad {}^{\circ}B_n^m(\alpha)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{m}{i}(\alpha+n-i)^m.$$

Množenjem jednakosti (22) sa $(1-x)$ dobija se

$$(29) \qquad \frac{(1-x)e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n-x^{n+1})\{{}^{\circ}p_n(\alpha, z)\}=\sum_{n=0}^{\infty}\{{}^{\circ}p_n(\alpha, z)-{}^{\circ}p_{n-1}(\alpha, z)\}x^n.$$

Stavićemo

$$(30) \qquad {}^{-1}p_n(\alpha, z)={}^{\circ}p_n(\alpha, z)-{}^{\circ}p_{n-1}(\alpha, z)$$

i funkcije ${}^{\circ}p_n(\alpha, z)$ i ${}^{\circ}p_{n-1}(\alpha, z)$ razvićemo na način (27); tako dobijamo

$$(31) \qquad {}^{-1}p_n(\alpha, z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\{{}^{\circ}B_n^m(\alpha)-{}^{\circ}B_{n-1}^m(\alpha)\}\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\{{}^{1}A_n^m(\alpha)\}.$$

Uopšte, za polinome ${}^{r}A_{\nu}^n(\alpha)$ vredi

$$(32) \qquad {}^{r+1}A_{\nu}^n(\alpha)={}^{r}A_{\nu}^n(\alpha)-{}^{r}A_{\nu-1}^n(\alpha).$$

Dokaz: ${}^{r}A_{\nu}^n(\alpha)=\binom{n+r}{0}(\alpha+\nu)^n+\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^k\binom{n+r}{k}(\alpha+\nu-k)^n,$

$${}^{r}A_{\nu-1}^n=\sum_{i=0}^{\nu-1}(-1)^i\binom{n+r}{i}(\alpha+\overline{\nu-1}-i)^n;$$

poslednju sumu pišemo tako da novi indeks k ide od 1 do ν; zato ćemo staviti $i=k-1$; tako je

$$ {}^{r}A_{\nu-1}^{n}=\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k-1}\binom{n+r}{k-1}[\alpha+(\nu-1)-(k-1)]^{n}=\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k-1}\binom{n+r}{k-1}(\alpha+\nu-k)^{n}, $$

$$ {}^{r}A_{\nu}^{n}(\alpha)-{}^{r}A_{\nu-1}^{n}(\alpha)=\binom{n+r}{0}(\alpha+\nu)^{n}+\sum_{k=1}^{\nu}\left[(-1)^{k}\binom{n+r}{k}-\right. $$

$$ \left.-(-1)^{k-1}\binom{n+r}{k-1}\right](\alpha+\nu-k)^{n}=\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^{k}\binom{n+r+1}{k}(\alpha+\nu-k)^{n}\equiv{}^{r+1}A_{\nu}^{n}(\alpha). $$

Poslednji dokaz vredi i u slučaju kad u (32) stavimo $r=-m<0$, što daje

$$ {}^{m-1}B_{\nu}^{n}(\alpha)={}^{m}B_{\nu}^{n}(\alpha)-{}^{m}B_{\nu-1}^{n}(\alpha). \tag{33} $$

Polinomi ${}^{r}A_{\nu}^{n}(\alpha)$ imaju i ovo svojstvo

$$ {}^{r}A_{n+r+k}^{n}(\alpha)\equiv 0,\ r=1,2,3,\ldots,\ k=0,1,2,\ldots \tag{34} $$

Dokaz:
$$ {}^{r}A_{n+r+k}^{n}(x)=\sum_{i=0}^{n+r+k}(-1)^{i}\binom{n+r}{i}(x+\overline{n+r+k}-i)^{n}\equiv $$

$$ \equiv\sum_{i=0}^{n+r}(-1)^{i}\binom{n+r}{i}(\overline{x+k}+\overline{n+r}-i)^{n}=D_{n+r}^{n}(x+k)\equiv 0. $$

Primenom formule (34) za $r=1$, red (31) može se pisati ovako

$$ {}^{-1}p_{n}(\alpha,z)=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{z^{m}}{m!}\{{}^{1}A_{n}^{m}(\alpha)\},\quad n=0,1,2,\ldots \tag{35} $$

Iz (29), (30) i (35) sleduje

$$ G_{-1}(\alpha,x,z)\equiv\frac{(1-x)e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)z}}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{z^{m}}{m!}\{{}^{1}A_{n}^{m}(\alpha)\}. \tag{36} $$

Preuređenjem reda (36) dobija se

$$ \frac{(1-x)e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}\sum_{k=0}^{n}x^{k}\{{}^{1}A_{k}^{n}(\alpha)\},\ |x|<1,\ |z|<1. \tag{37} $$

Budući da

$$ \frac{(1-x)e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)z}}\to\frac{1}{1-z}\ \text{kad}\ x\to 1 \tag{38} $$

to iz (37) sleduje

$$ \frac{1}{1-z}\equiv\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\{{}^{1}A_{k}^{n}(\alpha)\} $$

dakle

$$ \sum_{k=0}^{n}{}^{1}A_{k}^{n}(\alpha)=n! \tag{39} $$

Iz (32) sleduje neposredno

$$\sum_{i=0}^{\nu} {}^{r+1}A_i^n(\alpha) = {}^{r}A_\nu^n(\alpha) \tag{40}$$

što za $r=0$ daje

$$\sum_{i=0}^{\nu} {}^{1}A_i^n(\alpha) = {}^{\circ}B_\nu^n(\alpha). \tag{41}$$

Iz (39) i (41) dobijamo

$$ {}^{\circ}B_n^n(\alpha) = n! \tag{42}$$

a kako je ${}^{1}A_{n+k}^n(\alpha)=0$ za $k=1,2,3,\ldots$, to je na osnovu (41) i (39) takođe

$$ {}^{\circ}B_{n+k}^n(\alpha) = n!\ ,\ k=0,1,2,\ldots \tag{43}$$

Iz (27) na osnovu (43) sleduje

$$ {}^{\circ}p_n(\alpha,z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!} z^{n+k}. \tag{44}$$

Stavićemo

$$ R_n(\alpha,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!} z^{n+k} \tag{45}$$

i pokazaćemo pod rednim brojem (60) da ostatak $R_n(\alpha,z)$ razvoja (44) teži nuli kad $n\to\infty$ samo ako je $|z|<1$ tj.

$$ R_n(\alpha,z)\to 0 \text{ kad } n\to\infty \text{ za } |z|<1 \tag{46}$$

i stoga je

$$ \lim_{n\to\infty} \left\{ {}^{\circ}p_n(\alpha,z) \right\} = \frac{1}{1-z},\ |z|<1,\ |\alpha|<M. \tag{47}$$

Na osnovu (47) dobijamo *D'Alembert*-ovu graničnu vrednost (23). Da bismo dokazali (46) pokazaćemo da vredi

$$ \frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!} \to 1 \text{ kad } n\to\infty. \tag{48}$$

Na osnovu formula (2) i (7) dobijamo

$$ D_n^n(\alpha-k) = {}^{\circ}B_{n-k}^n(\alpha) + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{n-i} \binom{n}{n-i} (\alpha-k+i)^n $$

ili

$$ {}^{\circ}B_{n-k}^n(\alpha) = n! + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (k-i-\alpha)^n,\ k=1,2,3,\ldots,n. \tag{49}$$

Zbog $$\frac{\binom{n}{i}(k-i-\alpha)^n}{n!}\to 0 \text{ kad } n\to\infty,\ i=0,1,2,\ldots,k-1$$

dobijamo graničnu vrednost (48) u obliku

(50) $$\frac{{}^{\circ}B_{n-k}^{n}(\alpha)}{n!}\to 1 \text{ kad } n\to\infty .$$

4. Funkcionalne jednačine polinoma ${}^{\circ}B_k^n(\alpha)$ i ${}^{-1}B_k^n(\alpha)$. Granična vrednost reda $R_n(\alpha,z)$. Konvergencija reda $R_n(\alpha,\beta,z)$.

Formula (32) za $r=0$ i $\nu=n-k$ glasi

(51) $${}^{1}A_{n-k}^{n}(\alpha)={}^{\circ}B_{n-k}^{n}(\alpha)-{}^{\circ}B_{n-k-1}^{n}(\alpha).$$

Odavde zbog (50) sleduje

(52) $$\frac{{}^{1}A_{n-k}^{n}(\alpha)}{n!}\to 0 \text{ kad } n\to\infty .$$

Iz (51) zbog (49) dobija se funkcionalna jednačina za polinome ${}^{1}A_k^n(\alpha)$

(53) $${}^{1}A_k^n(\alpha)={}^{1}A_{n-k}^{n}(1-\alpha).$$

Slično, za polinome sa dva argumenta ${}^{1}A_k^n(\alpha,\beta)$ važi

$${}^{1}A_k^n(\alpha,\beta)={}^{1}A_{n-k}^{n}(\beta-\alpha,\beta).$$

Formula (39) daje

$$\sum_{\nu=0}^{n-k-1}{}^{1}A_\nu^n(\alpha)+\sum_{\nu=n-k}^{n}{}^{1}A_\nu^n(\alpha)=n!$$

a odavde na osnovu (41) i (51) sleduje funkcionalna jednačina za polinome ${}^{\circ}B_\nu^n(\alpha)$

(54) $${}^{\circ}B_{n-k-1}^{n}(\alpha)+{}^{\circ}B_k^n(1-\alpha)=n!\ .$$

Iz (54) na osnovu (50) sleduje

(55) $$\frac{{}^{\circ}B_k^n(1-\alpha)}{n!}\to 0 \text{ kad } n\to\infty$$

a odavde dalje zbog (51)

(56) $$\frac{{}^{1}A_k^n(\alpha)}{n!}\to 0 \text{ kad } n\to\infty\ .$$

Na osnovu (48) stavljamo

(57) $$\frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!}=1+\varepsilon_{n+k}(\alpha),\ k=1,2,3,\ldots$$

gde

(58) $$\varepsilon_{n+k}(\alpha) \to 0 \text{ kad } n \to \infty .$$

Zbog (57) imamo

(59) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} [1 + \varepsilon_{n+k}(\alpha)] z^k.$$

Stoga zbog (57) i (58) sleduje iz (59)

(60) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!} z^k = \frac{z}{1-z}, \quad |z|<1, \quad |\alpha|<M$$

i stoga vredi (46).

Iz (60) sleduje da svi redovi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!} z^k$, $n=0, 1, 2, \ldots$ imaju određene i ograničene sume za $|z|<1$. Stoga možemo odabrati konstantu K takvu da je

(61) $$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!} z^k \right| < K, \quad n=0, 1, 2, \ldots, \quad |z|<1$$

a na osnovu poslednjeg je

(62) $$|R_n(\alpha, z)| < K |z^n|, \quad |z|<1.$$

U vezi sa (16) dobija se

(63) $${}^{\circ}B_{n-k}^{n}(\alpha, \beta) = n!\, \beta^n + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} [(k-i)\beta - \alpha]^n$$

a odavde

(64) $$\lim_{n\to\infty} \frac{{}^{\circ}B_{n-k}^{n}(\alpha, \beta)}{n!} = \lim_{n\to\infty} \beta^n = 0 \text{ za } |\beta|<1, \quad |\alpha|<M.$$

Iz funkcionalne jednačine (54) dobija se

(65) $${}^{\circ}B_{n-k-1}^{n}(\alpha, \beta) + {}^{\circ}B_k^n(\beta-\alpha, \beta) = n!\, \beta^n$$

a odavde dužim transformacijama sledeće dve

(66) $${}^{\circ}B_n^{n+r}(-x, \beta) = (n+r)!\, \beta^{n+r} - {}^{\circ}B_{r-1}^{n+r}(\beta+x, \beta), \quad x>0, \quad \beta>0, \quad r=1, 2, 3, \ldots$$

(67) $${}^{\circ}B_r^{n+r}(\alpha, -x) = (-x)^{n+r} \left[(n+r)! - {}^{\circ}B_{r-1}^{n+r}\left(\frac{\alpha+x}{x}\right) \right], \quad \alpha>0, \quad x>0, \quad r=1, 2, 3, \ldots$$

Na osnovu *D'Alembert*-ovog kriterijuma dobija se da red (11) konvergira za svako realno z kada je $\alpha>0$, $\beta>0$ ili $\alpha<0$, $\beta<0$. Za $\alpha=-x<0$, $\beta>0$ upotrebićemo formulu (66) i dobijamo

(68) $$R_n(-x, \beta, z) = \frac{(\beta z)^{n+1}}{1-\beta z} - z^{n+1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_r^{n+r+1}(\beta+x, \beta)}{(n+r+1)!} z^r, \quad |\beta z|<1$$

a red na desnoj strani u (68) konvergira prema *D'Alembert*-ovu kriterijumu za $|\beta z| < 1$. Za $\alpha > 0$, $\beta = -x < 0$ upotrebićemo formulu (67) i dobiiamo

$$(69) \quad R_n(\alpha, -x, z) = \frac{(-xz)^{n+1}}{1+xz} - (-xz)^{n+1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_r^{n+r+1}\left(\frac{\alpha+x}{x}\right)}{(n+r+1)!}(-xz)^r, \; |-xz| < 1$$

a red na desnoj strani u (69) konvergira prema *D'Alembert*-ovu kriterijumu za $|-xz| < 1$. Stoga za $\operatorname{sign}\alpha = -\operatorname{sign}\beta$ imamo

$$(70) \qquad \lim_{n\to\infty} \left\{ z^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha,\beta)}{(n+k)!} z^k \right\} = 0, \; |z| < 1, \; |\beta z| < 1, \; |\alpha| < M.$$

Iz razvoja (10) na osnovu (70) proizilazi

$$(71) \qquad \lim_{n\to\infty} \{{}^{\circ}p_n(\alpha,\beta,z)\} = \frac{1}{1-\beta z}, \; |z| < 1, \; |\beta z| < 1, \; |\alpha| < M,$$

a na osnovu ovoga je

$$(72) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{{}^{\circ}p_{n+1}(\alpha,\beta,z)}{{}^{\circ}p_n(\alpha,\beta,z)} = 1, \; |z| < 1, \; |\beta z| < 1, \; |\alpha| < M.$$

Stoga razvoj

$$(73) \qquad G_0(\alpha,\beta,x,z) \equiv \frac{e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)\beta z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \{{}^{\circ}p_n(\alpha,\beta,z)\} x^n$$

konvergira za

$$|x| < 1, \; |z| < 1, \; |\beta z| < 1, \; |\alpha| < M.$$

5. Nesvojstveni integral funkcije ${}^{\circ}p_n(\alpha, z)$ i posledice iteracije ovoga integrala.

Postoji nesvojstveni integral funkcije ${}^{\circ}p_n(\alpha, z)$

$$(74) \qquad \int_{-\infty}^{\alpha} \left\{{}^{\circ}p_n(\alpha,z)\right\} d\alpha = \frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{n} \left\{{}^{\circ}p_\nu(\alpha,z)\right\}, \; z \neq 0$$

a postoji i nesvojstveni integral funkcije $G_0(\alpha, x, z)$

$$(75) \qquad \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)z}} d\alpha = \frac{1}{(1-x)z} \cdot \frac{e^{(1-x)z}}{1-xe^{(1-x)z}}.$$

Stavljamo

$$(76) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \{{}^{\circ}p_\nu(\alpha,z)\} = {}^{1}p_n(\alpha,z)$$

pa je

$$(77) \qquad G_1(\alpha,x,z) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \{{}^{1}p_n(\alpha,z)\} x^n.$$

Postupak dobijanja generatrise $G_1(\alpha, x, z)$ i funkcija ${}^1p_n(\alpha, z)$ može se neograničeno puta ponoviti. Tako dobijamo

(78) $$G_k(\alpha, x, z) = \frac{1}{(1-x)^k} \cdot \frac{e^{(1-x)\alpha z}}{1 - xe^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \{{}^k p_n(\alpha, z)\} x^n, \ |x| < 1, |z| < 1, |\alpha| < M,$$

gde je

(79) $${}^k p_n(\alpha, z) = \sum_{\nu=0}^{n} \{{}^{k-1} p_\nu(\alpha, z)\}.$$

Pokazaćemo da je

(80) $$\lim_{n\to\infty} \left\{{}^1 p_n(\alpha, z)\right\} = +\infty, \text{ za } |z| < 1, |\alpha| < M.$$

Funkcije ${}^\circ p_\nu(\alpha, z)$ u formuli (76) razvićemo u redove prema razvoju (44); tako dobijamo

(81) $${}^1 p_n(\alpha, z) = \frac{n+1}{1-z} - \frac{z(1-z^{n+1})}{(1-z)^2} + \sum_{p=0}^{n} R_p(\alpha, z).$$

Izračunaćemo graničnu vrednost izraza (81) za $|z| < 1$ kad $n \to \infty$; imamo dakle da odredimo sumu dvostrukog reda

(82) $$\sum_{p=0}^{\infty} R_p(\alpha, z) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^\circ B_p^{p+k}(\alpha)}{(p+k)!} z^{p+k}, \ |z| < 1.$$

Primenom formule (40) za slučaj $r = -1$ na dvostruki red (82) dobijamo

(83) $$\sum_{p=0}^{\infty} R_p(\alpha, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \{{}^1 B_{n-1}^n(\alpha)\}.$$

Da bismo sabrali red na desnoj strani jednakosti (83) navešćemo neka svojstva polinoma ${}^r B_\nu^n(\alpha)$. Na osnovu $D_n^n(x) = n!$ i $D_{n+r}^n(x) \equiv 0$ dokazujemo konačno

(84) $${}^r B_{n-r}^n(\alpha) = (n-r)! \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{r-i} St_{n-r}^{n-r+i} \alpha^{r-i}.$$

Iz (84) za $r = 1$ i $n = 2p$ dobija se

(85) $${}^1 B_{2p-1}^{2p}(\alpha) = (2p)!\, \alpha + (2p-1)!\, St_{2p-1}^{2p}$$

a odavde za $\alpha = 0$

(86) $${}^1 B_{2p-1}^{2p}(0) = (2p-1)!\, St_{2p-1}^{2p}.$$

Iz (54) dobija se

$${}^\circ B_{p-m}^{2p}(0) + {}^\circ B_{p+m}^{2p}(0) = (2p)!$$

a na osnovu ovoga i zbog toga što je ${}^\circ B_p^{2p} = \dfrac{(2p)!}{2}$, dobijamo

(87) $$\sum_{\nu=0}^{2p} \{{}^\circ B_\nu^{2p}(0)\} = {}^1 B_{2p}^{2p}(0) = \frac{(2p+1)!}{2}.$$

Ako iz sume (87) izdvojimo poslednji član ${}^{\circ}B_{2p}^{2p}(0)=(2p)!$ i prebacimo ga na drugu stranu, dobijamo

$$(88)\qquad {}^{1}B_{2p-1}^{2p}(0)=\frac{2p-1}{2}\cdot(2p)!\,.$$

Iz (86) i (88) sleduje

$$St_{2p-1}^{2p}=\binom{2p}{p}.$$

Slično se izvodi ako namesto $2p$ stoji $(2p-1)$. Imamo dakle

$$(89)\qquad St_{n-1}^{n}=\binom{n}{2}.$$

Iz (85) i (89) dobija se

$$(90)\qquad {}^{1}B_{n-1}^{n}(\alpha)=n!\,\alpha+(n-1)!\binom{n}{2}$$

a pomoću ovoga (83) daje

$$(91)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\left\{n!\,\alpha+(n-1)!\binom{n}{2}\right\}=\frac{2\alpha z-(2\alpha-1)z^2}{2(1-z)^2},\quad |z|<1,\ |\alpha|<M.$$

U izrazu (81) za ${}^{1}p_n(\alpha,z)$ drugi i treći član imaju konačne određene granične vrednosti, a prvi član neograničeno raste sa n; stoga vredi (80). Pokazaćemo da je

$$(92)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{{}^{1}p_n(\alpha,z)}{\binom{n+1}{1}}=\frac{1}{1-z},\quad |z|<1,\ |\alpha|<M.$$

Iz (81) dobija se

$$\frac{{}^{1}p_n(\alpha,z)}{\binom{n+1}{1}}=\frac{1}{1-z}-\frac{z(1-z^{n+1})}{(1-z)^2\binom{n+1}{1}}+\frac{1}{\binom{n+1}{1}}\sum_{p=0}^{n}R_p(\alpha,z)$$

a odavde zbog (91) sleduje (92).

Za red (77) na osnovu (80) i (47) imamo

$$(93)\qquad \frac{{}^{1}p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{1}p_n(\alpha,z)}=\frac{{}^{1}p_n(\alpha,z)+{}^{\circ}p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{1}p_n(\alpha,z)}\to 1 \text{ kad } n\to\infty,\ |z|<1,\ |\alpha|<M.$$

U izrazu (81) namesto n stavićemo $0,1,2,\ldots,n$ i dobivene razvoje ćemo sabrati; dobijamo

$$(94)\qquad {}^{2}p_n(\alpha,z)=\frac{\binom{n+2}{2}}{1-z}-\frac{\binom{n+1}{1}}{(1-z)^2}+\frac{z^2(1-z^{n+1})}{(1-z)^3}+\sum_{p=1}^{n}\binom{n-p+1}{1}R_p(\alpha,z).$$

Izračunavanje izrazâ za ${}^{k}p_n(\alpha,z)$ prema rekurentnoj formuli (79) osniva se na formuli

$$\sum_{r=0}^{p}\binom{n+r}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}.$$

Na taj način dobija se izraz

$$(95)\qquad {}^k p_n(\alpha, z) = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{\binom{n+k-m}{k-m}}{(1-z)^{m+1}} + (-1)^k \frac{(1-z^{n+1})\, z^k}{(1-z)^{k+1}} + \\ + \sum_{p=0}^{n} \binom{n-p+k-1}{k-1} R_p(\alpha, z).$$

Kod funkcije ${}^k p_n(\alpha, z)$ u formuli za količnik $\dfrac{{}^k p_n(\alpha, z)}{\binom{n+k-1}{k-1}}$ dolazi izraz

$$(96)\qquad \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{n-p+k-1}{k-1}}{\binom{n+k-1}{k-1}} R_p(\alpha, z)\,.$$

Količnik binomnih koeficijenata u ovom poslednjem izrazu može se prikazati kao alternativni zbir simetričnih funkcija algebarske jednačine stepena $(k-1)$-og veličinâ $\dfrac{p}{n+i-1}$, $i = 2, 3, 4, \ldots, k$. Koristeći *Cauchy*-ev stav o nula-nizu, zatim stav da je $\{n^\alpha a^n\}$ nula-niz za $|a| < 1$ i najzad nejednakost (62), granična vrednost izraza (96) jednaka je sumi reda (91). Na osnovu ovoga dobijamo iz (95)

$$(97)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{{}^k p_n(\alpha, z)}{\binom{n+k}{k}} = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1, |\alpha| < M.$$

Slično poslednjoj relaciji, za funkcije ${}^k p_n(\alpha, z)$ dobijamo i ove asimptotske relacije

$$(98)\qquad \frac{{}^k p_n(\alpha, z)}{\binom{n+k-1}{k-1}} \sim \frac{n}{k(1-z)} \ \text{kad}\ n\to\infty, \ |z| < 1, |\alpha| < M,$$

$$(99)\qquad {}^k p_n(\alpha, z) \sim \frac{n^k}{k!\,(1-z)} \ \text{kad}\ n\to\infty, |z| < 1, |\alpha| < M.$$

Na osnovu (97) i (98) dobija se

$$(100)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{{}^k p_{n+1}(\alpha, z)}{{}^k p_n(\alpha, z)} = 1, |z| < 1, |\alpha| < M.$$

Polazeći od integrala

$$(101)\qquad \int_{-\infty}^{\alpha} \left\{ {}^\circ p_n(\alpha, \beta, z) \right\} d\alpha = \frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ {}^\circ p_\nu(\alpha, \beta, z) \right\}, z \neq 0$$

analogno graničnoj vrednosti (100), dolazimo do granične vrednosti (14). Jednakost (22) za $\alpha = 1$ daje

$$G_0(1, x, z) = \frac{e^{(1-x)z}}{1 - xe^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \{{}^{\circ}p_n(1, z)\} x^n, \tag{102}$$

a za $\alpha = 0$,

$$G_0(0, x, z) = \frac{1}{1 - xe^{(1-x)z}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \{{}^{\circ}p_n(0, z)\} x^n. \tag{103}$$

Iz (102) i (103) sleduje

$$G_0(0, x, z) - 1 = x \cdot G_0(1, x, z). \tag{104}$$

Odavde proizilazi

$$G_k(0, x, z) - \frac{1}{(1-x)^k} = x \cdot G_k(1, x, z). \tag{105}$$

Razvijanjem leve i desne strane u red po stepenima od x dobija se iz (105)

$$^{k}p_n(1, z) = {}^{k}p_{n+1}(0, z) - \binom{n+k}{n+1} \tag{106}$$

a odavde dalje, razvijanjem u red po stepenima od z,

$$^{k}B_n^m(1) = {}^{k}B_{n+1}^m(0), \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{107}$$

i

$$^{k}B_n^{\circ}(1) = {}^{k}B_{n+1}^{\circ}(0) - \binom{n+k}{n+1}. \tag{108}$$

6. Parcijalno diferenciranje funkcije $^{\circ}p_n(\alpha, z)$ i svojstva njenih viših izvoda po α.

Diferenciranjem po α jednakosti (22) dobijamo

$$G_{-1}(\alpha, x, z) \equiv \frac{(1-x)\, e^{(1-x)\alpha z}}{1 - x\, e^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{{}^{\circ}p_n(\alpha, z)\} x^n. \tag{109}$$

Odavde u vezi sa (29) i (30) sleduje

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \{{}^{\circ}p_n(\alpha, z)\} = z\, \{{}^{-1}p_n(\alpha, z)\} = z\{{}^{\circ}p_n(\alpha, z) - {}^{\circ}p_{n-1}(\alpha, z)\}. \tag{110}$$

Zbog toga što je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{{}^{-1}p_n(\alpha, z)\} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \{{}^{\circ}p_n(\alpha, z)\} x^n - x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \{{}^{\circ}p_{n-1}(\alpha, z)\} x^n, \tag{111}$$

dobija se, da red na levoj strani poslednje jednakosti konvergira za $|x| < 1$, $|z| < 1$, $|\alpha| < M$, a na osnovu ovoga je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{{}^{-1}p_{n+1}(\alpha, z)}{{}^{-1}p_n(\alpha, z)} = 1, \quad |z| < 1, \ |\alpha| < M. \tag{112}$$

Izvod reda k po α jednakosti (22) je

$$(113)\quad G_{-k}(\alpha, x, z) \equiv \frac{(1-x)^k\, e^{(1-x)\,\alpha z}}{1-x\, e^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \{^{-k}p_n(\alpha, z)\}\, x^n, \; |x|<1, \; |z|<1, \; |\alpha|<M,$$

gde je

$$\frac{\partial^k}{\partial \alpha^k}\{^{\circ}p_n(\alpha, z)\} = z^k \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \{^{\circ}p_{n-i}(\alpha, z)\} = z^k \{^{-k}p_n(\alpha, z)\} =$$

$$(114)\quad = z^k \{^{-(k-1)}p_n(\alpha, z) - {}^{-(k-1)}p_{n-1}(\alpha, z)\}.$$

Na osnovu toga što je

$$(115)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \{^{-k}p_n(\alpha, z)\}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \{^{-(k-1)}p_n(\alpha, z)\}\, x^n - x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \{^{-(k-1)}p_{n-1}(\alpha, z)\}\, x^n$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

zaključujemo da iz konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} \{^{-(k-1)}p_n(\alpha, z)\}\, x^n$ sleduje konvergencija reda na levoj strani poslednje jednakosti za $|x|<1$, $|z|<1$, $|\alpha|<M$, te je stoga

$$(116)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{^{-k}p_{n+1}(\alpha, z)}{^{-k}p_n(\alpha, z)} = 1, \quad |z|<1, \quad |\alpha|<M.$$

Razvoj funkcije $^{-k}p_n(\alpha, z)$ po stepenima od z glasi

$$(117)\quad ^{-k}p_n(\alpha, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \{^{k}A_n^m(\alpha)\}.$$

Iz (104) dobijamo za funkciju $G_{-k}(\alpha, x, z)$ funkcionalnu jednačinu

$$(118)\quad G_{-k}(0, x, z) - (1-x)^k = x \cdot G_{-k}(1, x, z)$$

a odavde se dobija

$$(119)\quad ^{-k}p_{k+m}(1, z) = {}^{-k}p_{k+m+1}(0, z).$$

Razvijanjem u red leve i desne strane u (119) dobija se, prvo

$$(120)\quad ^{k}A_{k+m}^{m+1}(1) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

a to znači da je $\alpha = 1$ nula polinomâ $^{k}A_{k+m}^{m+1}(\alpha)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$; drugo

$$(121)\quad ^{k}A_{k+m}^{m+n}(1) = {}^{k}A_{k+m+1}^{m+n}(0).$$

Jednakost (53) diferencirana $(r-1)$ puta daje

$$^{r}A_k^{n-(r-1)}(\alpha) = (-1)^{r-1}\{^{r}A_{n-k}^{n-(r-1)}(1-\alpha)\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Stavljajući $n - r + 1 = m$, dobija se iz poslednje jednakosti sledeća

$$(122)\quad ^{r}A_k^m(\alpha) = (-1)^{r-1}\{^{r}A_{m+r-k-1}^m(1-\alpha)\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m-r+1.$$

Iz razvoja

$$\frac{(1-x)\,e^{(1-x)\alpha z}}{1-x\,e^{(1-x)z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\{{}^{-1}p_n(\alpha,z)\}\,x^n \tag{123}$$

sleduje, kad $x\to 1-0$,

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\{{}^{-1}p_n(\alpha,z)\},\quad |z|<1,\quad |\alpha|<M; \tag{124}$$

zaista zbir prvih $(n+1)$ članova reda (124) iznosi

$$\sum_{\nu=0}^{n}\{{}^{-1}p_\nu(\alpha,z)\}={}^{\circ}p_n(\alpha,z)$$

a odavde sleduje

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\{{}^{-1}p_\nu(\alpha,z)\}=\lim_{n\to\infty}\{{}^{\circ}p_n(\alpha,z)\}=\frac{1}{1-z},\quad |z|<1,\quad |\alpha|<M.$$

Redovi funkcija

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{{}^{-k}p_n(\alpha,z)\}=0,\quad k=2,3,4,\ldots \tag{125}$$

konvergiraju za $|z|<1$, $|\alpha|<M$. Na osnovu (114) imamo

$$\lim_{n\to\infty}\{{}^{-k}p_n(\alpha,z)\}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\cdot\lim_{n\to\infty}\{{}^{\circ}p_{n-i}(\alpha,z)\}= \tag{126}$$

$$=\frac{1}{1-z}\cdot\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}=0,\ |z|<1,\quad |\alpha|<M.$$

Zbog toga što je

$$\sum_{\nu=0}^{n}\{{}^{-k}p_\nu(\alpha,z)\}={}^{-(k-1)}p_n(\alpha,z)$$

dobija se na osnovu (126)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\{{}^{-k}p_\nu(\alpha,z)\}=\lim_{n\to\infty}\{{}^{-(k-1)}p_n(\alpha,z)\}=0,\quad |z|<1,\quad |\alpha|<M,$$

$k=2,3,4,\ldots$ tj. vredi (125).

Na osnovu (79) i (99) imamo

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\{{}^{k}p_\nu(\alpha,z)\}=\lim_{n\to\infty}\{{}^{k+1}p_n(\alpha,z)\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k+1}}{(k+1)!\,(1-z)}=+\infty,$$

$$|z|<1,\quad |\alpha|<M,$$

dakle

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\{{}^{k}p_\nu(\alpha,z)\}=+\infty,\quad |z|<1,\quad |\alpha|<M. \tag{127}$$

7. Nesvojstveni trigonometriski integrali izvedeni pomoću nove klase polinoma.

1° Na osnovu svojstva (107) za slučaj $k=0$ uzećemo na svaku jedinicu apscisne ose u intervalu $0 \leqslant x \leqslant n$ po jedan luk parabolâ

$$y = {}^{\circ}B_k^n(x-k), \quad k \leqslant x \leqslant k+1, \quad k=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1. \tag{128}$$

Dva susedna luka (128)

$$y = {}^{\circ}B_{k-1}^n\,(x-(k-1)), \quad k-1 \leqslant x \leqslant k \quad \text{i} \quad y = {}^{\circ}B_k^n(x-k),\ k \leqslant x \leqslant k+1 \tag{129}$$

imaju istu ordinatu u tački sa apscisom $x=k$, jer je

$${}^{\circ}B_{k-1}^n\,(k-(k-1)) = {}^{\circ}B_{k-1}^n\,(1) = {}^{\circ}B_k^n\,(0), \quad {}^{\circ}B_k^n\,(k-k) = {}^{\circ}B_k^n\,(0).$$

Luci parabolâ (128) čine neprekidnu krivu u intervalu $0 \leqslant x \leqslant n$. Krivu (128) pomaknućemo u levo duž ose X za n jedinica; tako dobijamo

$$y = {}^{\circ}B_k^n(x+n-k), \quad k \leqslant x+n \leqslant k+1, \quad k=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1. \tag{130}$$

Luke (130) obrnućemo oko ose Y za 180°; dobijamo

$$y = {}^{\circ}B_k^n(-x+n-k), \quad k \leqslant x \leqslant k+1, \quad k=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1. \tag{131}$$

Luci (130) i (131) prikazani su funkcijom

$$y = {}^{\circ}B_{-|x|+n}^n = \sum_{\nu=0}^{[-|x|+n]} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu} (-|x|+n-\nu)^n, \quad -n \leqslant x \leqslant +n. \tag{132}$$

Izračunaćemo unutrašnji integral za *Fourier*-ov integral funkcije (132)

$$\int_0^n {}^{\circ}B_{-|u|+n}^n\, e^{2itu} du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} {}^{\circ}B_{n-(k+1)}^n\,(-u+k+1)\, e^{2itu} du, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{133}$$

U integralu (133) izvršićemo smenu $-u+k+1=\xi$

$$\int_0^n {}^{\circ}B_{-|u|+n}^n\, e^{2itu} du = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{2it})^{k+1} \int_0^1 {}^{\circ}B_{n-(k+1)}^n\,(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi, \tag{134}$$

a ovde stavljamo $k+1=\nu$

$$\int_0^n {}^{\circ}B_{-|u|+n}^n\, e^{2itu} du = \sum_{\nu=1}^{n} (e^{2it})^{\nu} \int_0^1 {}^{\circ}B_{n-\nu}^n\,(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi. \tag{135}$$

U integral (135) uvodimo prema (28) izraz za ${}^{\circ}B_{n-\nu}^n(\xi)$

$$\int_0^n {}^{\circ}B_{-|u|+n}^n\, e^{2itu} du = \sum_{\nu=1}^{n} \int_0^1 (e^{2it})^{\nu} \cdot \sum_{i=0}^{n-\nu} (-1)^i \binom{n}{i} (\xi+n-\nu-i)^n\, e^{-2it\xi}\, d\xi \tag{136}$$

i u poslednjem integralu izvršimo množenja polinomâ $^\circ B^n_{n-\nu}(\xi)$ sa $(e^{2it})^\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$(137)\qquad \int_0^n {}^\circ B^n_{-|u|+n}\, e^{2itu} du = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-(k+1)} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (e^{2it})^{n-k-\nu} \int_0^1 (\xi + k)^n e^{-2it\xi} d\xi.$$

U integralima koji su na desnoj strani formule (137) izvršimo smenu $\xi + k = \alpha$

$$(138)\qquad \int_0^n {}^\circ B^n_{-|u|+n}\, e^{2itu} du = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-(k+1)} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (e^{2it})^{n-\nu} \int_0^1 \alpha^n e^{-2it\alpha} d\alpha.$$

Razvijanjem sume (138) po indeksima k i ν dobijamo izraze oblika

$$(-1)^k \binom{n}{k} (e^{2it})^{n-k} \int_0^{n-k} \alpha^n e^{-2it\alpha} d\alpha, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

koje treba sabrati; dakle

$$(139)\qquad \int_0^n {}^\circ B^n_{-|u|+n}\, e^{2itu} du = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (e^{2it})^{n-k} \int_0^{n-k} \alpha^n e^{-2it\alpha} d\alpha.$$

Primenom formule

$$\int_0^\lambda \alpha^n e^{-2it\alpha} d\alpha = \frac{e^{-2it\lambda}}{(-2it)} \sum_{k=0}^{n} \frac{k!\binom{n}{k}}{(2it)^k} \lambda^{n-k} - \frac{n!\binom{n}{n}}{(-2it)} \cdot \frac{1}{(2it)^n}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots, n$$

na izraz (139) dobija se

$$(140)\qquad \int_0^n {}^\circ B^n_{-|u|+n}\, e^{2itu} du =$$

$$= \frac{1}{(-2it)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \nu! \binom{n}{\nu} \left(\frac{1}{2it}\right)^\nu D^{n-\nu}_n(0) + n! \binom{n}{n} \left(\frac{1}{2it}\right)^n \left[D^o_n(0) - (-1)^n \binom{n}{n} \right] - \right.$$

$$\left. - n! \binom{n}{n} \left(\frac{1}{2it}\right)^n \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (e^{2it})^{n-\nu} \right\}.$$

Budući da je

$D^n_n(0) = n!$, $D^{n-\nu}_n(0) = 0$ za $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, $D^o_n(0) - (-1)^n \binom{n}{n} = (-1)^{n+1}$

to je

$$\int_0^n {}^\circ B^n_{-|u|+n}\, e^{2itu} du = \frac{1}{(-2it)} \left\{ n! + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{(2it)^n} - \frac{n!}{(2it)^n} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (e^{2it})^{n-\nu} \right\}$$

dakle

(141) $$\int_0^n {}^\circ B^n_{-|u|+n} e^{2itu} du = \frac{n!}{(-2it)} \left\{ 1 - \frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^n} \right\}.$$

Realni i imaginarni deo izraza (141) dobijamo iz jednakosti

(142) $$(e^{2it}-1)^n = (e^{it}-e^{-it})^n (e^{it})^n = (2i\sin t)^n \cdot [\cos(nt) + i\sin(nt)]$$

ako u ovu stavimo

(143) $$n = 1+4m,\ 2+4m,\ 3+4m,\ 4+4m,\ m = 0, 1, 2, \ldots;$$

dobija se

(144) $$(e^{2it}-1)^{1+4m} = i\cdot 2^{1+4m}\sin^{1+4m} t\cos(1+4m)t - 2^{1+4m}\sin^{1+4m} t\sin(1+4m)t$$

(145) $$(e^{2it}-1)^{2+4m} = -2^{2+4m}\sin^{2+4m} t\cos(2+4m)t - i\cdot 2^{2+4m}\sin^{2+4m} t\sin(2+4m)t$$

(146) $$(e^{2it}-1)^{3+4m} = -i\cdot 2^{3+4m}\sin^{3+4m} t\cos(3+4m)t + 2^{3+4m}\sin^{3+4m} t\sin(3+4m)t$$

(147) $$(e^{2it}-1)^{4+4m} = 2^{4+4m}\sin^{4+4m} t\cos(4+4m)t + i\cdot 2^{4+4m}\sin^{4+4m} t\sin(4+4m)t.$$

Stavljajući brojeve (143) u izraz (141) dobijamo u sva četiri slučaja rezultate jednako građene a u kojima namesto n stoje brojevi (143); stoga je za svaki prirodni broj

(148) $$R\left\{\frac{n!}{(-2it)}\left[1 - \frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^n}\right]\right\} = n!\,\frac{\sin(nt)\sin^n t}{2t^{n+1}}$$

(149) $$I\left\{\frac{n!}{(-2it)}\left[1 - \frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^n}\right]\right\} = n!\left(\frac{1}{2t} - \frac{\cos(nt)\sin^n t}{2t^{n+1}}\right).$$

Na osnovu (148) je

$$\int_{-n}^{+n} {}^\circ B^n_{-|u|+n}\cos(2tu)\,du = n!\,\frac{\sin(nt)\sin^n t}{t^{n+1}}$$

te *Fourier*-ova transformacija daje

(150) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(nt)\sin^n t}{t^{n+1}}\cos(2xt)\,dt = \frac{\pi}{n!}\{{}^\circ B^n_\nu(-|x|+n-\nu)\}$$

$$n-\nu-1 \leqslant x \leqslant n-\nu, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad n-1.$$
$$-(n-\nu) \leqslant x \leqslant -(n-\nu-1)$$

Definišemo neparnu funkciju

(151) $${}^\circ b^n_{-|x|+n} = {}^\circ B^n_{-|x|+n} \qquad \text{za } -n \leqslant x \leqslant 0$$

(152) $${}^\circ b^n_{-|x|+n} = -{}^\circ B^n_{-|x|+n} \qquad \text{za } 0 \leqslant x \leqslant n$$

za koju je

(153) $$\int_{-n}^{+n} {}^\circ b^n_{-|u|+n}\sin(2tu)\,du = n!\left(\frac{\cos(nt)\sin^n t}{t^{n+1}} - \frac{1}{t}\right).$$

Za $0<x\leqslant n$ sleduje iz (153) zbog (152) na osnovu *Fourier*-ove transformacije

$$(154)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\cos(nt)\sin^n t}{t^{n+1}}-\frac{1}{t}\right)\sin(2xt)\,dt=\frac{\pi}{n!}\{-{}^{\circ}B^n_{-|x|+n}\};$$

desna strana u (154) za $x=0$ ima vrednost

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n!}\{{}^{\circ}b^n_{-|-0|+n}+{}^{\circ}b^n_{-|+0|+n}\}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n!}\{{}^{\circ}B^n_{0+n}-{}^{\circ}B^n_{0+n}\}=0;$$

integral (154) za $x=0$ ima vrednost nula. Iz (154) sleduje

$$(155)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(nt)\sin^n t}{t^{n+1}}\sin(2xt)\,dt=\pi-\frac{\pi}{n!}\{{}^{\circ}B^n_{\nu}(-|x|+n-\nu)\}$$

$$n-\nu-1\leqslant x\leqslant n-\nu,\quad n=1,2,3,\dots,\quad \nu=0,1,2,\dots,\quad n-1.$$

Za $x=0$ desna strana integrala (155) ima vrednost $\pi-\frac{\pi}{n!}\{{}^{\circ}B^n_n(0)\}=0$; dakle (155) vredi za $x=0$.

2° Iz niza polinoma (131) dobijamo diferencirajući r puta i izostavljajući faktore koji nastaju pri diferenciranju, ovaj niz funkcija

$$(156)\quad y={}^{r}A^{n-r}_{k}(-x+n-k),\ k\leqslant x\leqslant k+1,\ k=0,1,2,\dots,n-1,\ r=1,2,3,\dots,n.$$

Luci (156) čine neprekidnu krivu u intervalu $0\leqslant x\leqslant n$ na osnovu svojstva (121). Ovi luci kao i simetrični u odnosu na osu Y prikazani sa funkcijom

$$(157)\ y={}^{r}A^{n-r}_{-|x|+n}=\sum_{\nu=0}^{[-|x|+n]}(-1)^{\nu}\binom{n}{\nu}(-|x|+n-\nu)^{n-r},\ r=1,2,3,\dots,n,\ -n\leqslant x\leqslant+n.$$

Funkcija (157) je parna funkcija. Iz ove funkcije dobićemo neparnu $y={}^{r}a^{n-r}_{-|x|+n}$ obrtanjem jedne njene grane za 180° oko ose X. Pokazaćemo da za ove funkcije postoji rekurentna integralna formula

$$(158)\qquad \int\limits_0^n {}^{r+1}A^{n-(r+1)}_{-|u|+n}\,e^{2itu}\,du=(e^{2it}-1)\int\limits_0^{n-1}{}^{r}A^{(n-1)-r}_{-|u|+(n-1)}\,e^{2itu}du$$

koja nam omogućuje izračunati unutrašnji integral

$$(159)\qquad \int\limits_0^n {}^{r}A^{n-r}_{-|u|+n}\,e^{2itu}\,du=(n-r)!\,\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-r+1}},\quad r=1,2,3,\dots,n.$$

Izračunaćemo prvo integral

$$(160)\qquad \int\limits_0^n {}^{1}A^{n-1}_{-|u|+n}e^{2itu}\,du=\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_k^{k+1}{}^{1}A^{n-1}_{n-(k+1)}(-u+k+1)\,e^{2itu}du,\quad i=\sqrt{-1}.$$

Transformacijom promenljive $-u+k+1=\xi$ i smenom indeksa $k+1=\nu$ dobijamo iz (160)

$$(161)\qquad \int\limits_0^n {}^{1}A^{n-1}_{-|u|+n}e^{2itu}\,du=\sum_{\nu=1}^{n}(e^{2it})^{\nu}\int\limits_0^1 {}^{1}A^{n-1}_{n-\nu}(\xi)\,e^{-2it\xi}d\xi.$$

Primenom formule ${}^1A_\nu^{n-1}(\alpha)={}^\circ B_\nu^{n-1}(\alpha)-{}^\circ B_{\nu-1}^{n-1}(\alpha)$ na (161) dobija se

$$(162)\qquad \int_0^n {}^1A_{-|u|+n}^{n-1}e^{2itu}\,du=e^{2it}\int_0^1 {}^\circ B_{n-1}^{n-1}(\xi)\,e^{-2it\xi}\,d\xi+e^{2it}\int_0^{n-1}{}^\circ B_{-|u|+(n-1)}^{n-1}\,e^{2itu}\,du-$$
$$-\int_0^{n-1}{}^\circ B_{-|u|+(n-1)}^{n-1}\,e^{2itu}\,du,$$

a odavde primenom integrala (141) dobijamo

$$(163)\qquad \int_0^n {}^1A_{-|u|+n}^{n-1}\,e^{2itu}\,du=(n-1)!\,\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^n},\quad n=1,2,3,\ldots$$

Izračunaćemo dalje integral

$$(164)\qquad \int_0^n {}^{r+1}A_{-|u|+n}^{n-(r+1)}\,e^{2itu}\,du=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}{}^{r+1}A_{n-(k+1)}^{n-(r+1)}(-u+k+1)\,e^{2itu}\,du,\quad i=\sqrt{-1}.$$

Transformacijom promenljive $-u+k+1=\xi$ i smenom indeksa $k+1=\nu$ dobijamo

$$(165)\qquad \int_0^n {}^{r+1}A_{-|u|+n}^{n-(r+1)}\,e^{2itu}\,du=\sum_{\nu=1}^n (e^{2it})^\nu\int_0^1 {}^{r+1}A_{n-\nu}^{n-(r+1)}(\xi)\,e^{-2it\xi}\,d\xi=$$
$$=\sum_{\nu=1}^n (e^{2it})^\nu\int_0^1\left[{}^rA_{n-\nu}^{n-(r+1)}(\xi)-{}^rA_{n-\nu-1}^{n-(r+1)}(\xi)\right]e^{-2it\xi}\,d\xi;$$

prva suma daje

$$(166)\qquad \sum_{\nu=1}^n (e^{2it})^\nu\int_0^1 {}^rA_{n-\nu}^{n-(r+1)}(\xi)\,e^{-2it\xi}\,d\xi=$$
$$=(e^{2it})^1\int_0^1 {}^rA_{n-1}^{(n-1)-r}(\xi)\,e^{-2it\xi}\,d\xi+e^{2it}\sum_{\nu=1}^{n-1}(e^{2it})^\nu\int_0^1 {}^rA_{(n-1)-\nu}^{(n-1)-r}(\xi)\,e^{-2it\xi}\,d\xi=$$
$$=e^{2it}\int_0^{n-1}{}^rA_{-|u|+(n-1)}^{(n-1)-r}\,e^{2itu}\,du;$$

druga suma daje

$$(167)\qquad \sum_{\nu=1}^n (e^{2it})^\nu\int_0^1 {}^rA_{n-\nu-1}^{(n-1)-r}(\xi)\,e^{-2it\xi}\,d\xi=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}(e^{2it})^\nu\int_0^1 {}^rA_{(n-1)-\nu}^{(n-1)-r}(\xi)\,e^{-2it\xi}\,d\xi+(e^{2it})^n\int_0^1 {}^rA_{n-n-1}^{(n-1)-r}(\xi)\,e^{-2it\xi}\,d\xi=$$
$$=\int_0^{n-1}{}^rA_{-|u|+(n-1)}^{(n-1)-r}\,e^{2itu}\,du.$$

Iz (165), (166) i (167) sleduje (158).

Stavljajući u (163) $(n-1)$ namesto n dobijamo postepeno pomoću formule (158) unutrašnje integrale funkcije (157)

$$(168)\qquad \int_0^n {}^{h+1+4k}A_{-|u|+n}^{n-(h+1+4k)}\, e^{2itu}\,du = \{n-(h+1+4k)\}!\,\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-h-4k}}$$

$$h=0,1,2,3;\quad n=h+1+4k+\nu,\quad \nu=0,1,2,\ldots$$

gde u vezi sa funkcijom (157) mora biti $h+1+4k\leqslant n$. Veličinu h uvodimo zbog periodičnosti stepena imaginarne jedinice. Za $k=0$ formula (168) s obzirom na četiri vrednosti indeksa h pretstavlja četiri integrala koji su nam potrebni radi određivanja realnog i imaginarnog dela integrala (168). Realni i imaginarni delovi pomenutih integrala dobijaju se pomoću formula (144) do (147). Lako se vidi da je

$$(169)\qquad R\left\{\frac{(e^{2it}-1)^n}{(e^{2it})^{n-h-4k}}\right\}=\frac{2^{4k}}{t^{-4k}}\,R\left\{\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-h}}\right\},\quad h=0,1,2,3;$$

$$(170)\qquad I\left\{\frac{(e^{2it}-1)^n}{(e^{2it})^{n-h-4k}}\right\}=\frac{2^{4k}}{t^{-4k}}\,I\left\{\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-h}}\right\},\quad h=0,1,2,3.$$

Ova razmatranja upotrebićemo takođe kod beskonačnog niza funkcija (181). U integralu (168) dajemo veličini h šire značenje, koje nije vezano za imaginarnu jedinicu; uzimamo $h=2q-1$, $q=1,2,3,\ldots$ i tada je $h+1+4k=2q+4k$. Stavljamo $2q+4k=2r$ i tada je $h+1+4k=2r-1$, pa integral (168) prima sledeći oblik

$$(171)\qquad \int_0^n {}^{2r}A_{-|u|+n}^{n-2r}\, e^{2itu}\,du=(n-2r)!\,\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-(2r-1)}};$$

stoga je za parnu funkciju $y={}^{2r}A_{-|u|+n}^{n-2r}$, ako primenimo (169) za $h=1,3$

$$(172)\qquad \int_{-n}^{+n} {}^{2r}A_{-|u|+n}^{n-2r}\cos(2tu)\,du=(n-2r)!\,(-1)^r\,2^{2r}\,\frac{\sin(nt)\sin^n t}{t^{n-(2r-1)}}$$

dakle

$$(173)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(nt)\sin^n t}{t^{n-(2r-1)}}\cos(2xt)\,dt=\frac{(-1)^r}{2^{2r}}\cdot\frac{\pi}{(n-2r)!}\,\{{}^{2r}A_\nu^{n-2r}(-|x|+n-\nu)\}$$

$$n-\nu-1\leqslant x\leqslant n-\nu,\qquad n=2,3,4\ldots,\qquad 2\leqslant 2r\leqslant n,$$

$$-(n-\nu)\leqslant x\leqslant -(n-\nu-1),\qquad \nu=0,1,2,\ldots,n-1,\qquad r=1,2,3,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right].$$

Za neparnu funkciju $y={}^{2r}a_{-|u|+n}^{n-2r}$, ako primenimo (170) za $h=1,3$, dobija se

$$(174)\qquad \int_{-n}^{+n} {}^{2r}a_{-|u|+n}^{n-2r}\, e^{2itu}\,du=(n-2r)!\,(-1)^r\,2^{2r}\,\frac{\cos(nt)\sin^n t}{t^{n-(2r-1)}}$$

dakle

$$(175)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nt)\sin^n t}{t^{n-(2r-1)}} \sin(2xt)\,dt = \frac{(-1)^r}{2^{2r}} \frac{\pi}{(n-2r)!} \left\{ {}^{2r}A_{\nu}^{n-2r}(-|x|+n-\nu) \right\}$$

$$n-\nu-1 \leqslant x \leqslant n-\nu,\ n=2,3,4,\ldots,\qquad 2\leqslant 2r\leqslant n,$$

$$\nu=0,1,2,\ldots,n-1,\qquad r=1,2,3,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right].$$

U (168) uzećemo $h=2q$, $q=1,2,3,\ldots$; tada je $h+1+4k=(2q+4k)+1=2r+1$, $h+4k=2r$, pa integral (168) prima sledeći oblik

$$(176)\qquad \int_0^n {}^{2r+1}A_{-|u|+n}^{n-(2r+1)} e^{2itu}\,du = (n-2r-1)!\,\frac{(e^{2it}-1)^n}{(e^{2it})^{n-2r}};$$

stoga je za parnu funkciju $y={}^{2r+1}A_{-|u|+n}^{n-(2r+1)}$, ako primenimo (169) za $h=0,2$

$$(177)\qquad \int_{-n}^{+n} {}^{2r+1}A_{-|u|+n}^{n-(2r+1)} e^{2itu}\,du = (n-2r-1)!\,(-1)^r\,2^{2r+1}\,\frac{\cos(nt)\sin^n t}{t^{n-2r}}$$

dakle

$$(178)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nt)\sin^n t}{t^{n-2r}} \cos(2xt)\,dt = \frac{(-1)^r}{2^{2r+1}} \frac{\pi}{(n-2r-1)!} \left\{ {}^{2r+1}A_{\nu}^{n-(2r+1)}(-|x|+n-\nu) \right\}$$

$$n-\nu-1\leqslant x\leqslant n-\nu,\qquad n=1,2,3,\ldots,\qquad 1\leqslant 2r+1\leqslant n,$$

$$-(n-\nu)\leqslant x\leqslant -(n-\nu-1),\qquad \nu=0,1,2,\ldots,n-1,\qquad r=0,1,2,\ldots,\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Za neparnu funkciju $y={}^{2r+1}a_{-|u|+n}^{n-(2r+1)}$, ako primenimo (170) za $h=0,2$, dobija se

$$(179)\qquad \int_{-n}^{+n} {}^{2r+1}a_{-|u|+n}^{n-(2r+1)} e^{2itu}\,du = (n-2r-1)!\,(-1)^r\,2^{2r+1}\,\frac{\sin(nt)\sin^n t}{t^{n-2r}}$$

dakle

$$(180)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(nt)\sin^n t}{t^{n-2r}} \sin(2xt)\,dt = \frac{(-1)^r}{2^{2r+1}} \cdot \frac{\pi}{(n-2r-1)!} \left\{ {}^{2r+1}A_{\nu}^{n-(2r+1)}(-|x|+n-\nu) \right\}$$

$$n-\nu-1\leqslant x\leqslant n-\nu,\ n=1,2,3,\ldots,\qquad 1\leqslant 2r+1\leqslant n$$

$$\nu=0,1,2,\ldots,n-1,\ r=0,1,2,\ldots,\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

3° Namesto konačnog niza krivih (157) posmatramo beskonačan niz krivih

$$(181)\qquad y={}^{r}A^{m}{}_{-|x|+(m+r)},\ r=1,2,3,\ldots$$

Kriva (181) postaje iz krive (157) da stavimo $n-r=m$. Niz polinoma

$$(182)\qquad y={}^{r}A_{k}^{m}(x-k),\ k\leqslant x\leqslant k+1,\ k=0,1,2,\ldots,m+r-1$$

čini neprekidnu krivu u intervalu $0\leqslant x\leqslant m+r$ na osnovu svojstva (121).

Za $x=0$ i $x=m+r$ ordinata krive (182) je nula. Na osnovu funkcionalne jednačine (122) je

(183) $(-1)^{r-1}\{{}^rA_k^m(x-k)\}={}^rA^m_{(m+r+1)-k}(-x+k+1),\ k=0,1,2,\dots,m+r-1.$

Polinomi na desnoj strani jednakosti (183) prikazani su funkcijom

$$(184)\qquad y={}^rA^m_{-|x|+(m+r)}=\sum_{\nu=0}^{[-|x|+m+r]}(-1)^\nu\binom{m+r}{\nu}(-|x|+\overline{m+r}-\nu)^m,$$

$$-(m+r)\leqslant x\leqslant+(m+r).$$

U funkciji (181) stavićemo $r=h+1+4k$, $h=0,1,2,3$, pa ćemo imati sledeća četiri niza parnih funkcija

$$(185)\qquad y={}^{\lambda+4k}A^m_{-|x|+(m+\lambda+4k)},\ \lambda=1,2,3,4;\ k=0,1,2,\dots$$

i odgovarajuće neparne funkcije

$$(186)\qquad y={}^{\lambda+4k}a^m_{-|x|+(m+\lambda+4k)},\ \lambda=1,2,3,4;\ k=0,1,2,\dots$$

U integralu (168) stavićemo $h+1+4k=r$

$$(187)\qquad \int_0^n{}^rA^{n-r}_{-|u|+n}\,e^{2itu}du=(n-r)!\,\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-r+1}},\ r=1,2,3,\dots,n.$$

Na osnovu smene $n-r=m$ dobijamo iz (187)

$$(188)\qquad \int_0^{m+r}{}^rA^m_{-|u|+(m+r)}\,e^{2itu}du=m!\,\frac{(e^{2it}-1)^{m+r}}{(2it)^{m+1}},\ r=1,2,3,\dots$$

Realni i imaginarni delovi integrala (168) dati su formulama (169) i (170). Stavljajući u ove izraze $n-h-1-4k=m$, gde je $h=0,1,2,3$, dobićemo realne i imaginarne delove integrala (188). Ovi realni odnosno imaginarni delovi pretstavljaju unutrašnje integrale *Fourier*-ova integrala za parne funkcije (185) odnosno za neparne funkcije (186). Stoga je beskonačni niz funkcija (181) osnova sledećoj grupi od osam integrala

$$(189)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(m+1+4k)t\sin^{m+1+4k}t}{t^{m+1}}\cos(2xt)dt=$$

$$=\frac{1}{2^{1+4k}}\cdot\frac{\pi}{m!}\{{}^{1+4k}A^m_\nu(-|x|+\overline{m+1+4k}-\nu)\}$$

$$(m+1+4k)-\nu-1\leqslant x\leqslant(m+1+4k)-\nu,\quad m=0,1,2,\dots,\quad k=0,1,2,\dots$$

$$-[(m+1+4k)-\nu]\leqslant x\leqslant-[(m+1+4k)-\nu-1],\ \nu=0,1,2,\dots,\ m+4k,$$

$$(190)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(m+1+4k)t\sin^{m+1+4k}t}{t^{m+1}}\sin(2xt)\,dt=$$

$$=\frac{+1}{2^{1+4k}}\cdot\frac{\pi}{m!}\{{}^{1+4k}A^m_\nu(-|x|+\overline{m+1+4k}-\nu)\}$$

$(m+1+4k)-\nu-1 \leqslant x \leqslant (m+1+4k)-\nu, \quad m=0, 1, 2, \ldots, \quad k=0, 1, 2, \ldots$

$\nu=0, 1, 2, \ldots, \quad m+4k,$

$$(191) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(m+2+4k)\,t \sin^{m+2+4k} t}{t^{m+1}} \cos(2xt)\,dt = $$

$$= \frac{-1}{2^{2+4k}} \cdot \frac{\pi}{m!} \{{}^{2+4k}A_{\nu}^{m}(-|x|+\overline{m+2+4k}-\nu)\}$$

$(m+2+4k)-\nu-1 \leqslant x \leqslant (m+2+4k)-\nu, \quad m=0, 1, 2, \ldots, \quad k=0, 1, 2, \ldots$

$-[(m+2+4k)-\nu] \leqslant x \leqslant -[(m+2+4k)-\nu-1], \quad \nu=0, 1, 2, \ldots, \quad m+1+4k,$

$$(192) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(m+2+4k)\,t \sin^{m+2+4k} t}{t^{m+1}} \sin(2xt)\,dt = $$

$$= \frac{+1}{2^{2+4k}} \cdot \frac{\pi}{m!} \{{}^{2+4k}A_{\nu}^{m}(-|x|+\overline{m+2+4k}-\nu)\}$$

$(m+2+4k)-\nu-1 \leqslant x \leqslant (m+2+4k)-\nu, \quad m=0, 1, 2, \ldots, \quad k=0, 1, 2, \ldots$

$\nu=0, 1, 2, \ldots, \quad m+1+4k,$

$$(193) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(m+3+4k)\,t \sin^{m+3+4k} t}{t^{m+1}} \cos(2xt)\,dt = $$

$$= \frac{-1}{2^{3+4k}} \cdot \frac{\pi}{m!} \{{}^{3+4k}A_{\nu}^{m}(-|x|+\overline{m+3+4k}-\nu)\}$$

$(m+3+4k)-\nu-1 \leqslant x \leqslant (m+3+4k)-\nu, \quad m=0, 1, 2, \ldots, \quad k=0, 1, 2, \ldots$

$-[(m+3+4k)-\nu] \leqslant x \leqslant -[(m+3+4k)-\nu-1], \quad \nu=0, 1, 2, \ldots, \quad m+2+4k,$

$$(194) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(m+3+4k)\,t \sin^{m+3+4k} t}{t^{m+1}} \sin(2xt)\,dt = $$

$$= \frac{-1}{2^{3+4k}} \cdot \frac{\pi}{m!} \{{}^{3+4k}A_{\nu}^{m}(-|x|+\overline{m+3+4k}-\nu)\}$$

$(m+3+4k)-\nu-1 \leqslant x \leqslant (m+3+4k)-\nu, \quad m=0, 1, 2, \ldots, \quad k=0, 1, 2, \ldots$

$\nu=0, 1, 2, \ldots, \quad m+2+4k,$

$$(195) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(m+4+4k)\,t \sin^{m+4+4k} t}{t^{m+1}} \cos(2xt)\,dt = $$

$$= \frac{+1}{2^{4+4k}} \cdot \frac{\pi}{m!} \{{}^{4+4k}A_{\nu}^{m}(-|x|+\overline{m+4+4k}-\nu)\}$$

$(m+4+4k)-\nu-1 \leqslant x \leqslant (m+4+4k), \quad m=0, 1, 2, \ldots, \quad k=0, 1, 2, \ldots$

$-[(m+4+4k)-\nu] \leqslant x \leqslant -[(m+4+4k)-\nu-1], \quad \nu=0, 1, 2, \ldots, \quad m+3+4k,$

$$(196)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(m+4+4k)\,t\sin^{m+4+4k} t}{t^{m+1}} \sin(2xt)\,dt =$$

$$= \frac{-1}{2^{4+4k}} \cdot \frac{\pi}{m!} \{{}^{4+4k}A_{\nu}^{m}(-|x| + \overline{m+4+4k} - \nu)\}$$

$$(m+4+4k) - \nu - 1 \leqslant x \leqslant (m+4+4k) - \nu, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad m+3+4k.$$

4° Desnu granu krive (184) pomaknućemo translatorno duž ose X za $\frac{m+r}{2}$ jedinica u levo. Tako dobijamo krivu čija je jednačina

$$(197)\qquad y = {}^{r}A^{m}_{-x+\frac{m+r}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\left[-x+\frac{m+r}{2}\right]} (-1)^{\nu} \binom{m+r}{\nu} \left(-x + \frac{m+r}{2} - \nu\right)^{m},$$

$$-\frac{m+r}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{m+r}{2}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

Ova funkcija pretstavlja luke (183) pomaknute za $\frac{m+r}{2}$ jedinica u levo. Pokazaćemo da je

$$(198)\qquad I_{\frac{m+r}{2}} = \int_{-\frac{m+r}{2}}^{+\frac{m+r}{2}} {}^{r}A^{m}_{-u+\frac{m+r}{2}}\, e^{2itu}\,du = (e^{-2it})^{\frac{m+r}{2}} \cdot \int_{0}^{m+r} {}^{r}A^{m}_{-|u|+(m+r)}\, e^{2itu}\,du.$$

Budući da je

$$(199)\qquad I_{\frac{m+r}{2}} = \sum_{k=0}^{m+r-1} \int_{-\frac{m+r}{2}+k}^{-\frac{m+r}{2}+k+1} {}^{r}A^{m}_{m+r-(k+1)} \left(-u - \frac{m+r}{2} + k + 1\right) e^{2itu}\,du,$$

dobija se transformacijom promenljive $-u - \frac{m+r}{2} + k + 1 = \xi$ i smenom indeksa $k+1 = \nu$

$$(200)\qquad I_{\frac{m+r}{2}} = (e^{-2it})^{\frac{m+r}{2}} \sum_{\nu=0}^{m+r} (e^{2it})^{\nu} \int_{0}^{1} {}^{r}A^{m}_{m+r-\nu}(\xi)\, e^{-2it\xi}\,d\xi.$$

Polazeći od polinomâ (183) dobijamo za integral (188)

$$(201)\qquad \int_{0}^{m+r} {}^{r}A^{m}_{-|u|+(m+r)}\, e^{2itu}\,du = \sum_{\nu=1}^{m+r} (e^{2it})^{\nu} \int_{0}^{1} {}^{r}A^{m}_{m+r-\nu}(\xi)\, e^{-2it\xi}\,d\xi.$$

Iz (200) i (201) sleduje (198). Iz (198) i (188) sleduje

$$(202) \qquad \int_{-\frac{m+r}{2}}^{+\frac{m+r}{2}} {}^{r}A^{m}_{-u+\frac{m+r}{2}} e^{2itu}\, du = \left[m! \frac{(e^{2it}-1)^{m+r}}{(2it)^{m+1}}\right] \cdot (e^{-2it})^{\frac{m+r}{2}} \equiv$$

$$\equiv m!\,(2i)^{r-1} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{m+1} \sin^{r-1} t.$$

Za $r-1=2\nu+1$ poslednji izraz izgleda ovako

$$m!\,2^{2\nu+1}(-1)^{\nu}\, i \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{m+1} \sin^{2\nu+1} t$$

ili, ako pišemo n namesto m, r namesto ν, imamo

$$(203) \qquad n!\,2^{2r+1}(-1)^{r}\, i \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} \sin^{2r+1} t.$$

Izraz (203) je imaginaran; zbog toga imamo *Fourier*-ov integral neparne funkcije

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} \sin^{2r+1} t \sin(2xt)\, dt =$$

$$= \frac{(-1)^r}{2^{2r+1}} \frac{\pi}{n!} \left\{ {}^{2r+2}A^{n}_{n+2r+2-(k+1)}\left(-x-\frac{n+2r+2}{2}+k+1\right)\right\}.$$

Na osnovu funkcionalne jednačine (122) dobija se

$${}^{2r+2}A^{n}_{n+2r+2-(k+1)}\left(-x-\frac{n+2r+2}{2}+k+1\right) = -\left\{{}^{2r+2}A^{n}_{k}\left(x+\frac{n+2r+2}{2}-k\right)\right\}$$

i stoga je

$$(204) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} \sin^{2r+1} t \sin(2xt)\, dt = \frac{(-1)^{r+1}}{2^{2r+1}} \frac{\pi}{n!} \left\{{}^{2r+2}A^{n}_{k}\left(x+\frac{n+2r+2}{2}-k\right)\right\}$$

$$-\frac{n+2r+2}{2}+k \leqslant x \leqslant -\frac{n+2r+2}{2}+k+1, \quad k=0,1,2,\ldots, n+2r+1,$$

$$n=0,1,2,\ldots, \quad r=0,1,2,\ldots$$

Za $r-1=2\nu$ izraz (202) izgleda ovako

$$m!\,2^{2\nu}(-1)^{\nu} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{m+1} \sin^{2\nu} t$$

ili, ako pišemo n namesto m, r namesto ν, imamo

$$(205) \qquad n!\,2^{2r}(-1)^{r} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} \sin^{2r} t.$$

Izraz (205) je realan; zbog toga imamo *Fourier*-ov integral parne funkcije

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1}\sin^{2r}t\cos(2xt)dt=$$

$$=\frac{(-1)^r}{2^{2r}}\frac{\pi}{n!}\left\{{}^{2r+1}A^n_{n+2r+1-(k+1)}\left(-x-\frac{n+2r+1}{2}+k+1\right)\right\}.$$

Na osnovu funkcionalne jednačine (122) dobija se

$${}^{2r+1}A^n_k\left(x+\frac{n+2r+1}{2}-k\right)=(-1)^{2r}\left\{{}^{2r+1}A^n_{n+2r+1-(k+1)}\left(-x-\frac{n+2r+1}{2}+k+1\right)\right\}$$

i stoga je

$$(206)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1}\sin^{2r}t\cos(2xt)dt=\frac{(-1)^r}{2^{2r}}\cdot\frac{\pi}{n!}\left\{{}^{2r+1}A^n_k\left(x+\frac{n+2r+1}{2}-k\right)\right\}$$

$$-\frac{n+2r+1}{2}+k\leqslant x\leqslant-\frac{n+2r+1}{2}+k+1,\qquad k=0,1,2,\ldots,n+2r,$$

gde je za $n=0$, $r=1,2,3,\ldots$; a za $n=1,2,3,\ldots$, $r=0,1,2,\ldots$

5° U nizu (157) zbir gornjih indeksa je n. Uzećemo sličan niz u kome je zbir gornjih indeksa $(n+1)$.

$$(207)\qquad y={}^rA^{(n+1)-r}_{-|x|+(n+1)}=\sum_{\nu=0}^{[-|x|+n+1]}(-1)^\nu\binom{n+1}{\nu}\left(-|x|+n+1-\nu\right)^{(n+1)-r},$$

$$r=1,2,3,\ldots,n+1,\qquad -(n+1)\leqslant x\leqslant+(n+1).$$

Unutrašnji integral *Fourier*-ova integrala funkcije (207) izračunaćemo tako da u integral (187) namesto n stavimo $(n+1)$

$$(208)\ \int_0^{n+1}{}^rA^{(n+1)-r}_{-|u|+(n+1)}e^{2itu}du=(n+1-r)!\,\frac{(e^{2it}-1)^{n+1}}{(2it)^{(n+1)-(r-1)}},\quad r=1,2,3,\ldots,(n+1).$$

Desnu granu krive (207) pomaknućemo translatorno duž ose X za $\frac{n+1}{2}$ jedinica u levo. Tako dobijamo krivu čija je jednačina

$$(209)\quad y={}^rA^{(n+1)-r}_{-x+\frac{n+1}{2}}=\sum_{\nu=0}^{\left[-x+\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^\nu\binom{n+1}{\nu}\left(-x+\frac{n+1}{2}-\nu\right)^{(n+1)-r},$$

$$r=1,2,3,\ldots,n+1,\qquad -\frac{n+1}{2}\leqslant x\leqslant+\frac{n+1}{2}.$$

Analogno formuli (198) dokazuje se da vredi

$$(210)\quad \int_{-\frac{n+1}{2}}^{+\frac{n+1}{2}}{}^rA^{(n+1)-r}_{-u+\frac{n+1}{2}}\,e^{2itu}du=(e^{-2it})^{\frac{n+1}{2}}\cdot\int_0^{n+1}{}^rA^{(n+1)-r}_{-|u|+(n+1)}\,e^{2itu}du,\ 1\leqslant r\leqslant n+1.$$

Stoga je $\int\limits_{-\frac{n+1}{2}}^{+\frac{n+1}{2}} {}^{r}A^{(n+1)-r}_{-u+\frac{n+1}{2}} e^{2itu} du = \left[(n+1-r)!\, \frac{(e^{2it}-1)^{n+1}}{(2it)^{(n+1)-(r-1)}}\right] \cdot (e^{-2it})^{\frac{n+1}{2}} =$

(211) $$= (n+1-r)!\, (2i)^{r-1} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-r+2} \sin^{r-1} t.$$

Za $r-1=2k+1$ poslednji izraz izgleda ovako

(212) $$[n-(2k+1)]!\, 2^{2k+1}(-1)^k i \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-2k} \sin^{2k+1} t.$$

Izraz (212) je imaginaran; zbog toga imamo *Fourier*-ov integral neparne funkcije

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-2k} \sin^{2k+1} t \sin(2xt)\, dt =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} \cdot \frac{\pi}{[n-(2k+1)]!} \left\{ {}^{2k+2}A_r^{n-(2k+1)} \left(-x+\frac{n+1}{2}-r\right)\right\}.$$

Na osnovu funkcionalne jednačine (122) dobija se

$${}^{2k+2}A_r^{n-(2k+1)} \left(-x+\frac{n+1}{2}-r\right) = -\left\{ {}^{2k+2}A_\nu^{n-(2k+1)} \left(x+\frac{n+1}{2}-\nu\right)\right\}$$

i stoga je

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-2r} \sin^{2r+1} t \sin(2xt)\, dt =$$

(213) $$= \frac{(-1)^{r+1}}{2^{2r+1}} \cdot \frac{\pi}{[n-(2r+1)]!} \left\{ {}^{2r+2}A_\nu^{n-(2r+1)} \left(x+\frac{n+1}{2}-\nu\right)\right\}$$

$$-\frac{n+1}{2}+\nu \leqslant x \leqslant -\frac{n+1}{2}+\nu+1, \quad n=1,2,3,\ldots, \quad 1 \leqslant 2r+1 \leqslant n,$$

$$\nu = 0,1,2,\ldots, n, \quad r=0,1,2,\ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Za $r-1=2k$ izraz (211) izgleda ovako

(214) $$(n-2k)!\, 2^{2k}(-1)^k \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-(2k-1)} \sin^{2k} t.$$

Izraz (214) je realan; zbog toga imamo *Fourier*-ov integral parne funkcije

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-(2k-1)} \sin^{2k} t \cos(2xt)\, dt =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \cdot \frac{\pi}{(n-2k)!} \left\{ {}^{2k+1}A_r^{n-2k} \left(-x+\frac{n+1}{2}-r\right)\right\}.$$

Na osnovu funkcionalne jednačine (122) dobija se

$$ {}^{2k+1}A_r^{n-2k}\left(-x+\frac{n+1}{2}-r\right)={}^{2k+1}A_\nu^{n-2k}\left(x+\frac{n+1}{2}-\nu\right) $$

i stoga je

$$ \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-(2r-1)}\sin^{2r}t\cos(2xt)\,dt= $$

(215) $$ =\frac{(-1)^r}{2^{2r}}\cdot\frac{\pi}{(n-2r)!}\left\{{}^{2r+1}A_\nu^{n-2r}\left(x+\frac{n+1}{2}-\nu\right)\right\} $$

$$ -\frac{n+1}{2}+\nu\leqslant x\leqslant-\frac{n+1}{2}+\nu+1,\quad n=0,1,2,\ldots,\quad 0\leqslant 2r\leqslant n, $$

$$ \nu=0,1,2,\ldots,n,\quad r=0,1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]. $$

Prof. *Mitrinović* je obavestio autora ovoga rada da su *R. Deaux* i *M. Delcourte* [5] odredili jedan partikularni slučaj integrala (215). R. Deaux i M. Delcourte odredili su integral

(216) $$ \int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2n-1}x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}. $$

Integral (215) za $n=2r$ i $\nu=r$ daje

$$ \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^1\sin^{2r}t\cos(2xt)\,dt=\frac{(-1)^r}{2^{2r}}\cdot\frac{\pi}{0!}\left\{{}^{2r+1}A_r^0\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\},\quad -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant+\frac{1}{2}, $$

a odavde za $x=0$ dobija se

(217) $$ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^{2r+1}t}{t}\,dt=\frac{(-1)^r}{2^{2r}}\cdot\frac{\pi}{0!}\left\{{}^{2r+1}A_r^0\left(\frac{1}{2}\right)\right\}. $$

Iz definicione formule (1) dobija se

$$ {}^{2r+1}A^0(\alpha)=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{2r+1}{i}=(-1)^r\binom{2r}{r} $$

i stoga iz (217) proizilazi

(218) $$ \int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2r+1}t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2^{2r+1}}\binom{2r}{r}. $$

Integral (216) za $n=r+1$ postaje integral (218).

6° Na osnovu desne grane krive (132) izvešćemo još jednu klasu integrala. Krivu

(2 19) $$ y={}^{\circ}B_{-|x|+(n+1)}^{n+1}=\sum_{\nu=0}^{[-|x|+n+1]}(-1)^\nu\binom{n+1}{\nu}(-|x|+\overline{n+1}-\nu)^{n+1}, $$

$$ 0\leqslant x\leqslant n+1 $$

pomaći ćemo translatorno u pravcu negativnog dela ose X za $\frac{n+1}{2}$ jedinica, a zatim ćemo je pomaći translatorno u pravcu negativnog dela ose Y za $\frac{(n+1)!}{2}$ jedinica. Prva translacija daje krivu čija je jednačina

(220) $$y = {}^{\circ}B^{n+1}_{-x+\frac{n+1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\left[-x+\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{\nu} \binom{n+1}{\nu} \left(-x+\frac{n+1}{2}-\nu\right)^{n+1},$$

$$-\frac{n+1}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{n+1}{2}.$$

Druga translacija daje krivu čija je jednačina

(221) $$y = {}^{\circ}B^{n+1}_{-x+\frac{n+1}{2}} - \frac{(n+1)!}{2}, \quad -\frac{n+1}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{n+1}{2}.$$

Stavićemo $n+1=m$ i izračunaćemo integral

(222) $$\int_{-\frac{m}{2}}^{+\frac{m}{2}} {}^{\circ}B^{m}_{-u+\frac{m}{2}}\, e^{2itu}\, du = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{-\frac{m}{2}+k}^{-\frac{m}{2}+k+1} {}^{\circ}B^{m}_{m-(k+1)}\left(-u-\frac{m}{2}+k+1\right) e^{2itu}\, du;$$

transformacijom promenljive $-u-\frac{m}{2}+k+1=\xi$ i smenom indeksa $k+1=\nu$ dobija se

(223) $$\int_{-\frac{m}{2}}^{+\frac{m}{2}} {}^{\circ}B^{m}_{-u+\frac{m}{2}}\, e^{2itu}\, du = (e^{-2it})^{\frac{m}{2}} \cdot \int_{0}^{m} {}^{\circ}B^{m}_{-|u|+m}\, e^{2itu}\, du;$$

stoga je

(224) $$\int_{-\frac{m}{2}}^{+\frac{m}{2}} {}^{\circ}B^{m}_{-u+\frac{m}{2}}\, e^{2itu}\, du = \frac{m!}{(-2it)} \left\{1 - \frac{(e^{2it}-1)^m}{(2it)^m}\right\} \cdot (e^{-2it})^{\frac{m}{2}};$$

realni i imaginarni deo integrala (224) je

(225) $$R = m!\, \frac{\sin(mt)}{2t}, \qquad I = m! \left[\frac{\cos(mt)}{2t} - \frac{1}{2t}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m\right]. \qquad (226)$$

U vezi sa (224) je

(227) $$I_{\frac{m}{2}} = \int_{-\frac{m}{2}}^{+\frac{m}{2}} \left({}^{\circ}B^{m}_{-u+\frac{m}{2}} - \frac{m!}{2}\right) e^{2itu}\, du = \frac{m!}{(-2it)} \left\{1 - \frac{(e^{2it}-1)^m}{(2it)^m}\right\} (e^{-2it})^{\frac{m}{2}} - \frac{m!}{2}\frac{\sin(mt)}{t}.$$

Na osnovu (225) i (226) dobija se realni i imaginarni deo integrala $I_{\frac{m}{2}}$

$$R\left\{I_{\frac{m}{2}}\right\}=\frac{m!}{2}\frac{\sin(mt)}{t}-\frac{m!}{2}\frac{\sin(mt)}{t}=0 \tag{228}$$

$$I\left\{I_{\frac{m}{2}}\right\}=m!\left[\frac{\cos(mt)}{2t}-\frac{1}{2t}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m\right]; \tag{229}$$

stoga je za funkciju

$$y=\begin{cases} {}^{\circ}B^{n+1}_{-x+\frac{n+1}{2}}-\dfrac{(n+1)!}{2}, & |x|\leqslant\dfrac{n+1}{2} \\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{n+1}{2} \end{cases}, \tag{230}$$

$$I\left\{I_{\frac{n+1}{2}}\right\}=(n+1)!\left[\frac{\cos(n+1)t}{2t}-\frac{1}{2t}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1}\right]. \tag{231}$$

Na osnovu (231) je

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n+1)t}{2t}-\frac{1}{2t}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1}\right]\sin(2xt)\,dt= \tag{232}$$

$$=\frac{\pi}{(n+1)!}\left\{{}^{\circ}B^{n+1}_{-x+\frac{n+1}{2}}-\frac{(n+1)!}{2}\right\},\quad -\frac{n+1}{2}<x<+\frac{n+1}{2}.$$

Na gornjoj granici intervala $x=\dfrac{n+1}{2}$ imamo

$${}^{\circ}B^{n+1}_{0\leqslant\left(-x+\frac{n+1}{2}\right)<1}={}^{\circ}B^{n+1}_{0}\left(-\frac{n+1}{2}+\frac{n+1}{2}\right)=0$$

pa integral (232) za $x=\dfrac{n+1}{2}$ ima vrednost

$$\frac{\pi}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2}\left\{\left[{}^{\circ}B^{n+1}_{0}(0)-\frac{(n+1)!}{2}\right]+0\right\}=-\frac{\pi}{4}. \tag{233}$$

Iz (232) sleduje

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1}\frac{\sin(2xt)}{t}dt=\pi-\frac{2\pi}{(n+1)!}\left({}^{\circ}B^{n+1}_{-x+\frac{n+1}{2}}\right)+ \tag{234}$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(n+1)t\sin(2xt)}{t}dt,\quad -\frac{n+1}{2}<x<+\frac{n+1}{2}.$$

U vezi sa integral-sinusom poslednji integral na desnoj strani u (234) ima ove vrednosti: 0 z $|2x|<n+1$, $\dfrac{\pi}{2}$ za $|2x|=n+1$, π za $|2x|>n+1$.

Stoga iz (234) sleduje

$$\text{(235)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} \frac{\sin(2xt)}{t}\, dt = \pi - \frac{2\pi}{(n+1)!}\left\{{}^{\circ}B_{n-k}^{n+1}\left(-x - \frac{n+1}{2} + k + 1\right)\right\}$$

$$-\frac{n+1}{2} + k \leqslant x \leqslant -\frac{n+1}{2} + k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad -\frac{n+1}{2} < x < +\frac{n+1}{2}.$$

Na osnovu funkcionalne jednačine (54) dobija se

$${}^{\circ}B_{n-k}^{n+1}\left(-x - \frac{n+1}{2} + k + 1\right) = {}^{\circ}B_{p}^{n+1}\left(-x + \frac{n+1}{2} - p\right), \quad n - k = p$$

i

$$\pi - \frac{2\pi}{(n+1)!}\left\{{}^{\circ}B_{p}^{n+1}\left(-x + \frac{n+1}{2} - p\right)\right\} = -\pi + \frac{2\pi}{(n+1)!}\left\{{}^{\circ}B_{\nu}^{n+1}\left(x + \frac{n+1}{2} - \nu\right)\right\},$$

$$n = p + \nu;$$

stoga je

$$\text{(236)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} \frac{\sin(2xt)}{t}\, dt = -\pi + \frac{2\pi}{(n+1)!}\left\{{}^{\circ}B_{\nu}^{n+1}\left(x + \frac{n+1}{2} - \nu\right)\right\}$$

$$-\frac{n+1}{2} + \nu \leqslant x \leqslant -\frac{n+1}{2} + \nu + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

8. Ravnomerna konvergencija izvesnih nizova polinoma ${}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha)$. Veza između *Nielsen*-ovih polinoma i *Bernoulli*-evih funkcija.

Posmatramo kvadratnu šemu polinomâ

$$\text{(237)} \quad \frac{{}^{\circ}B_{k}^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!}, \qquad n, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Iz funkcionalne jednačine (54) za $n = 2r$, $k = r - 1$, $\alpha = 0$ dobijamo

$$\text{(238)} \quad {}^{\circ}B_{r}^{2r}(0) = \frac{(2r)!}{2}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

a za $n = 2r + 1$, $k = r$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ dobijamo

$$\text{(239)} \quad {}^{\circ}B_{r}^{2r+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2r+1)!}{2}, \qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

U vezi sa vrednostima (238) i (239) izvešćemo izvesne granične vrednosti nizova paralelnih sa glavnom dijagonalom u šemi (237) i to za one vrednosti argumenta α koje su celi brojevi.

Na osnovu definicione formule (2) imamo

$$\frac{{}^{\circ}B_{r+k}^{2r}(\alpha)}{(2r)!} - \frac{{}^{\circ}B_{r}^{2r}(\alpha + k)}{(2r)!} = \frac{1}{(2r)!}\sum_{i=1}^{k} (-1)^{r+i}\binom{2r}{r+i}(\alpha + k - i)^{2r}$$

a odavde se dobija

$$\lim_{r\to\infty} \frac{{}^\circ B_{r+k}^{2r}(\alpha)}{(2r)!} = \lim_{r\to\infty} \frac{{}^\circ B_r^{2r}(\alpha+k)}{(2r)!}, \quad k=0, 1, 2, \ldots \tag{240}$$

Za $\alpha = -k$ sleduje iz (240) i (238)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{{}^\circ B_{r+k}^{2r}(-k)}{(2r)!} = \lim_{r\to\infty} \frac{{}^\circ B_r^{2r}(0)}{(2r)!} = \frac{1}{2}, \quad k=0, 1, 2, \ldots \tag{241}$$

Funkcionalna jednačina (54) za $\alpha = -x$ daje

$${}^\circ B_{2r-k-1}^{2r}(-x) = (2r)! - {}^\circ B_k^{2r}(1+x).$$

Za $k = r - m$ imamo

$${}^\circ B_{m+r-1}^{2r}(-x) = (2r)! - {}^\circ B_{r-m}^{2r}(1+x)$$

a odavde za $x = m-1$ dobijamo

$${}^\circ B_{r+m-1}^{2r}\{-(m-1)\} = (2r)! - {}^\circ B_{r-m}^{2r}(+m);$$

stavimo li $m - 1 = q$, biće

$$\frac{{}^\circ B_{r-m}^{2r}(+m)}{(2r)!} = 1 - \frac{{}^\circ B_{r+q}^{2r}(-q)}{(2r)!}$$

a odavde zbog (241) sleduje

$$\lim_{r\to\infty} \frac{{}^\circ B_{r-m}^{2r}(+m)}{(2r)!} = \frac{1}{2}, \quad m=0, 1, 2, \ldots \tag{242}$$

Kod graničnih vrednosti polinomâ ${}^\circ B_{r+k}^{2r+1}(\alpha)$, koje ćemo sada izvesti, argument je ceo broj uvećan za $\frac{1}{2}$.

Na osnovu definicione formule (2) imamo

$$\frac{{}^\circ B_{r+k}^{2r+1}(\alpha)}{(2r+1)!} - \frac{{}^\circ B_r^{2r+1}(\alpha+k)}{(2r+1)!} = \frac{1}{(2r+1)!} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{r+i} \binom{2r+1}{r+i} (\alpha+k-i)^{2r+1}$$

a odavde se dobija

$$\lim_{r\to\infty} \frac{{}^\circ B_{r+k}^{2r+1}(\alpha)}{(2r+1)!} = \lim_{r\to\infty} \frac{{}^\circ B_r^{2r+1}(\alpha+k)}{(2r+1)!}, \quad k=0, 1, 2, \ldots \tag{243}$$

Za $\alpha = -k + \frac{1}{2}$ sleduje iz (243) i (239)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{{}^\circ B_{r+k}^{2r+1}\left(-k+\frac{1}{2}\right)}{(2r+1)!} = \lim_{r\to\infty} \frac{{}^\circ B_r^{2r+1}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2r+1)!} = \frac{1}{2}, \quad k=0, 1, 2, \ldots \tag{244}$$

Funkcionalna jednačina (54) za $\alpha = -x$ daje

$$°B_{2r-k}^{2r+1}(-x) = (2r+1)! - °B_k^{2r+1}(1+x);$$

za $k = r - m$ imamo

$$°B_{r+m}^{2r+1}(-x) = (2r+1)! - °B_{r-m}^{2r+1}(1+x)$$

a odavde za $x = m - \frac{1}{2}$ dobijamo

$$\frac{°B_{r-m}^{2r+1}\left(m+\frac{1}{2}\right)}{(2r+1)!} = 1 - \frac{°B_{r+m}^{2r+1}\left(-m+\frac{1}{2}\right)}{(2r+1)!};$$

s obzirom na (244) sleduje iz poslednje jednakosti

$$\lim_{r\to\infty} \frac{°B_{r-m}^{2r+1}\left(m+\frac{1}{2}\right)}{(2r+1)!} = \frac{1}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{245}$$

U vezi sa šemom (237) uvodimo sada neparnu funkciju na sledeći način

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{(2n)!}\left\{°B_{-|x|+2n}^{2n}\right\} = \dfrac{1}{(2n)!}\sum\limits_{\nu=0}^{[-|x|+2n]}(-1)^\nu\dbinom{2n}{\nu}(-|x|+2n-\nu)^{2n}, & 0 \leqslant x \leqslant 2n \\ f(-x) = -f(x), & -2n \leqslant x \leqslant 0. \end{cases} \tag{246}$$

Fourier-ov red funkcije (246) glasi

$$\frac{°B_{-|x|+2n}^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\left[1 - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left\{\frac{\sin\frac{k\pi}{4n}}{\frac{k\pi}{4n}}\right\}^{2n}\right]\sin\left(\frac{2k\pi}{4n}x\right). \tag{247}$$

Razdvajanjem parnih od neparnih članova u redu (247) dobija se

$$\frac{°B_{-|x|+2n}^{2n}}{(2n)!} = \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)}\sin\left[\frac{(2p-1)\pi}{2n}x\right] + \tag{248}$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\left[1-(-1)^p\left\{\frac{\sin\frac{p\pi}{2n}}{\frac{p\pi}{2n}}\right\}^{2n}\right]\sin\left(\frac{2p\pi}{2n}x\right), \quad x \neq 0.$$

Vrednost funkcije (246) u intervalu $(n-k-1,\ n-k]$, $k=0,1,2,\ldots,\ n-1$ tj. kad je $x=n-k-\alpha$, $0\leqslant\alpha<1$ jeste ${}^{\circ}B_{n+k}^{2n}(\alpha)$. Razvoj (248) za $x=n-k-\alpha$ izgleda ovako

$$\frac{{}^{\circ}B_{n+k}^{2n}(\alpha)}{(2n)!}=\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)}\cos\frac{(2p-1)\pi(k+\alpha)}{2n}+ \tag{249}$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\left[1-(-1)^p\left(\frac{\sin\frac{p\pi}{2n}}{\frac{p\pi}{2n}}\right)^{2n}\right]\sin\frac{p\pi(k+\alpha)}{n}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\left[1-(-1)^p\left(\frac{\sin\frac{p\pi}{2n}}{\frac{p\pi}{2n}}\right)^{2n}\right]\sin\frac{p\pi(k+\alpha)}{n}.$$

Koeficijenti reda (249) ostaju konačni kad $n\to\infty$, jer je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{p\pi}{2n}}{\frac{p\pi}{2n}}\right)^{2n}=1-0;$$

stoga iz (249) sleduje

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}B_{n+k}^{2n}(\alpha)}{(2n)!}=\frac{1}{2},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1. \tag{250}$$

Iz (240) na osnovu (250) sleduje

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}B_{n}^{2n}(\alpha+k)}{(2n)!}=\frac{1}{2},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1. \tag{251}$$

Budući da k u formuli (250) može biti proizvoljno velik konačan prirodan broj, jer n neograničeno raste, to formulu (251) možemo napisati ovako

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}B_{n}^{2n}[(\alpha+p)+(k-p)]}{(2n)!}=\frac{1}{2},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1,\ 0\leqslant p\leqslant k \tag{252}$$

ili, stavljajući $\alpha+p=x$, $k-p=m$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}B_{n}^{2n}(x+m)}{(2n)!}=\frac{1}{2},\quad p\leqslant x\leqslant p+1. \tag{253}$$

Iz (240) na osnovu (253) sleduje

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}B_{n}^{2n}(x+m)}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}B_{n+m}^{2n}(x)}{(2n)!}=\frac{1}{2},\quad m\neq n. \tag{254}$$

Između *Nielsen*-ovih polinoma i *Bernoulli*-evih funkcija

$$Б_{2p+1}(x)=(-1)^{p+1}\cdot 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi\nu x)}{(2\pi\nu)^{2p+1}},\quad p=0,1,2,\ldots$$

$$Б_{2p}(x)=(-1)^{p+1}\cdot 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi\nu x)}{(2\pi\nu)^{2p}},\quad p=1,2,3,\ldots,$$

uspostavili smo sledeće veze

(255) $$ {}^{1}A_{\nu}^{2n}(x)+{}^{1}A_{\nu}^{2n}(1-x)=\frac{2\left\{{}^{1}A_{\nu+1}^{2n+1}\right\}}{2n+1}+$$

$$+2\sum_{p=1}^{n}(2p-1)!\binom{2n}{2p-1}\left\{{}^{2p+1}A_{\nu+1}^{2n-2p+1}(0)\right\}Б_{2p}(x)$$

$$\nu=0,1,2,\ldots,n;$$

(256) $$ {}^{1}A_{\nu}^{2n-1}(x)-{}^{1}A_{\nu}^{2n-1}(1-x)=2\sum_{p=1}^{n}(2p-2)!\binom{2n-1}{2p-2}\left\{{}^{2p}A_{\nu+1}^{2n-2p+1}(0)\right\}Б_{2p+1}(x).$$

Pomoću vrednosti polinomâ ${}^{1}A_{\nu}^{2n}(x)$ i ${}^{1}A_{\nu}^{2n}(1-x)$ iz intervala (0,1) načinili smo parne funkcije u intervalu $-1\leqslant x\leqslant +1$. Razvijanjem ove dve funkcije u *Fourier*-ov red i sabiranjem ta dva reda, dobijamo formulu (255). Pomoću vrednosti polinomâ ${}^{1}A_{\nu}^{2n-1}(x)$ i ${}^{1}A_{\nu}^{2n-1}(1-x)$ iz intervala (0,1) načinili smo neparne funkcije u intervalu $-1\leqslant x\leqslant +1$. Razvijanjem ove dve funkcije u *Fourier*-ov red i oduzimanjem ta dva reda, dobijamo formulu (256).

9. Definicija *Bernoulli*-evih polinoma sa dva argumenta i njihovo razlaganje na polinome ${}^{1}A_{\nu}^{n}(\alpha,\beta)$ odnosno na polinome ${}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha,\beta)$.

Lako je uvideti da se generatrisa *Bernoulli*-evih brojeva može i ovako napisati

(257) $$\frac{\beta z}{e^{\beta z}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(B\beta)^{n}\frac{z^{n}}{n!}$$

a odavde dobijamo generatrisu *Bernoulli*-evih polinoma sa dva argumenta

(258) $$\frac{\beta z e^{\alpha z}}{e^{\beta z}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(B\beta)^{n}\frac{z^{n}}{n!}\cdot\sum_{n=0}\frac{(\alpha z)^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}(\alpha+B\beta)^{n}.$$

Razlikovaćemo tri vrste *Bernoulli*-evih polinoma

(259) $$B_{n}(\alpha,\beta)=(\alpha+B\beta)^{n},\qquad P_{n}(\alpha,\beta)=\frac{1}{n!}(\alpha+B\beta)^{n},$$ (260)

(261) $$Q_{n}(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha+B\beta)^{n+1}-(B\beta)^{n+1}}{n+1}.$$

Pokazaćemo da se polinomi $B_n(\alpha,\beta)$ mogu razložiti na polinome ${}^1A_\nu^n(\alpha,\beta)$ prema formuli

$$(\alpha+B\beta)^n=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)\binom{n+1}{\nu+1}}\left\{{}^1A_\nu^n(\alpha,\beta)\right\}. \tag{262}$$

U poznatom obliku za beta-funkciju

$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}}=\frac{1}{p\binom{p+q-1}{p}},\quad p \text{ i } q \text{ prirodni brojevi,}$$

izvršićemo smenu $t=-u$

$$B(p,q)=\int_{-\infty}^{0}\frac{(-u)^{p-1}\,du}{(1-u)^{p+q}}. \tag{263}$$

U (263) stavljamo $p=\nu+1$, $q=n-\nu+1$

$$B(\nu+1,\; n-\nu+1)=\int_{-\infty}^{0}\frac{(-u)^\nu du}{(1-)u^{n+2}}=\frac{1}{(\nu+1)\binom{n+1}{\nu+1}}. \tag{264}$$

Generatrisa polinomâ ${}^1A_\nu^n(\alpha,\beta)$ je

$$\frac{(1-x)\,e^{(1-x)\,\alpha z}}{1-xe^{(1-x)\,\beta z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}x^k\left\{{}^1A_k^n(\alpha,\beta)\right\}. \tag{265}$$

Iz (265) delenjem sa $(1-x)$ dobija se

$$\frac{e^{(1-x)\,\alpha z}}{1-xe^{(1-x)\,\beta z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\left\{\frac{1}{1-x}\sum_{k=0}^{n}x^k[{}^1A_k^n(\alpha,\beta)]\right\} \tag{266}$$

a odavde smenom $(1-x)z=u$ proizilazi

$$\frac{e^{\alpha u}}{1-xe^{\beta u}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}\left\{\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}x^k[{}^1A_k^n(\alpha,\beta)]\right\}. \tag{267}$$

Iz (267) dobija se

$$\frac{e^{\alpha u}}{(1-x)(1-xe^{\beta u})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{x^\nu}{(1-x)^{n+2}}[{}^1A_\nu^n(\alpha,\beta)]. \tag{268}$$

U vezi sa granicama integrala (263) određujemo integral

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{\alpha u}}{(1-x)(1-xe^{\beta u})}\,dx=\frac{\beta u e^{\alpha u}}{e^{\beta u}-1}; \tag{269}$$

stoga iz (268) na osnovu (269), (264) i (258) sleduje

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}(\alpha+B\beta)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)\binom{n+1}{\nu+1}}\{{}^1A_\nu^n(\alpha,\beta)\}$$

što daje formulu (262).

Budući da je

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\{{}^rB_\nu^n(\alpha,\beta)\}=n\cdot\{{}^{r-1}B_\nu^{n-1}(\alpha,\beta)\},$$

dobija se na osnovu ovoga

$$\int_0^x {}^1A_\nu^n(x,\beta)\,dx=\frac{1}{n+1}\{{}^\circ B_\nu^{n+1}(x,\beta)-{}^\circ B_\nu^{n+1}(0,\beta)\} \tag{270}$$

a slično kao i za polinome $P_n(\alpha)=\frac{1}{n!}(\alpha+B)^n$ izvodi se da je

$$\int_0^\alpha P_n(\alpha,\beta)\,d\alpha=P_{n+1}(\alpha,\beta)-P_{n+1}(0,\beta). \tag{271}$$

Iz (262) dobija se množenjem sa $\frac{1}{n!}$ i integriranjem od 0 do α

$$P_{n+1}(\alpha,\beta)-P_{n+1}(0,\beta)=\frac{1}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)\binom{n+1}{\nu+1}}\left\{\frac{{}^\circ B_\nu^{n+1}(\alpha,\beta)-{}^\circ B_\nu^{n+1}(0,\beta)}{n+1}\right\}. \tag{272}$$

Budući da je

$$P_{n+1}(\alpha,\beta)=\frac{1}{(n+1)!}(\alpha+B\beta)^{n+1},\quad P_{n+1}(0,\beta)=\frac{1}{(n+1))}(B\beta)^{n+1}$$

to je

$$\frac{(\alpha+B\beta)^{n+1}-(B\beta)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)\binom{n+1}{\nu+1}}\left\{\frac{{}^\circ B_\nu^{n+1}(\alpha,\beta)-{}^\circ B_\nu^{n+1}(0,\beta)}{n+1}\right\}$$

ili

$$\frac{(\alpha+B\beta)^{n+1}-(B\beta)^{n+1}}{n+1}=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)\binom{n+1}{\nu+1}}\left\{\frac{{}^\circ B_\nu^{n+1}(\alpha,\beta)-{}^\circ B_\nu^{n+1}(0,\beta)}{n+1}\right\}. \tag{273}$$

R É S U M É

SUR UNE NOUVELLE CLASSE DE POLYNÔMES DANS LA THÉORIE DE FONCTIONS SPÉCIALES

Boško S. Tomić

Dans son livre „Traité élémentaire des nombres de Bernoulli" [1] (Paris, 1923, p. 28) Niels Nielsen a introduit une suite spéciale double de polynômes

$$A_{\nu}^{n}(\alpha) = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^{i} \binom{n+1}{i} (\alpha+\nu-i)^{n}.$$

Ces polynômes, pour $\alpha = 0$, déterminent une suite particulière double de nombres d'Euler, que celui-ci avait introduit dans ses „Institutiones calculi differentialis" [2] (St. Pétersbourg, 1755, pp. 489—491).

Comme une généralisation des polynômes de Nielsen l'auteur introduit une nouvelle classe de polynômes tout entière qui contient une multitude infinie de suites doubles de polynômes à deux arguments. Pour chacune de ces suites de polynômes il donne la fonction génératrice (4). Il détermine de même la fonction génératrice des polynômes de Cesàro [3]. Il démontre plusieurs propriétés différentes des polynômes nouvellement introduits. De la génératrice des polynômes ${}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha)$ (18), que l'auteur avait introduite dans son travail „Sur une classe des polynômes et sur les intégrales s'y rattachant" [4] (Zagreb, 1954, Glasnik, pp. 229—243) il résulte que la suite de polynômes $\{{}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha)\}$ forme la suite fondamentale de toute la classe nouvellement introduite de polynômes. Au moyen de cette génératrice il arrive à ces fonctions ${}^{\circ}p_{n}(\alpha,z)$ (24), qui sont aussi d'une importance fondamentale pour toute la classe introduite de polynômes. Il introduit l'intégrale (74) des fonctions ${}^{\circ}p_{n}(\alpha,z)$ et, par l'itération de l'intégrale susmentionnée, il arrive aux fonctions ${}^{k}p_{n}(\alpha,z)$ et en connexion avec ces fonctions il détermine la valeur limite (97) et les relations asymptotiques (98), (99) et (100). Il déduit l'équation fonctionnelle (106) pour les fonctions ${}^{k}p_{n}(\alpha, z)$ et de celle-ci il obtient une propriété extrêmement importante (107) de ses polynômes ${}^{k}B_{n}^{m}(\alpha)$. Par la différentiation de la fonction génératrice de la suite fondamentale de polynômes il arrive à la seconde suite de fonctions ${}^{-k}p_{n}(\alpha, z)$, donne l'équation fonctionnelle (119) pour ces fonctions, et de celle-ci il obtient, analoguement à la propriété (107), une propriété extrêmement importante (121) des polynômes ${}^{k}A_{n}^{m}(\alpha)$. Il trouve aussi les équations fonctionnelles (53) et (54), ainsi que les équations déduites de celles-ci pour les polynômes à deux arguments. En rapport avec les fonctions ${}^{-k}p_{n}(\alpha, z)$ il détermine la somme de la série fonctionnelle (124) ainsi que les sommes des séries fonctionnelles (125).

En considération des propriétés (107) et (121) il arrive à dix-neuf intégrales trigonométriques. Il détermine l'intégrale complexe (141), à la base de laquelle, à l'aide de la transformation de Fourier, il arrive à ses deux intégrales fondamentales (150) et (155). Il donne la formule intégrale recurrente (158), à la base de laquelle il déduit quatre intégrales ultérieures (173), (175), (178) et (180). A la place de la suite finie de courbes (157) qui forme la

base des intégrales susmentionnées, il introduit une suite infinie de courbes (184) qui forme la base au groupe suivant composé de huit intégrales indiquées sous les numéros (189) à (196). Par la translation de la branche droite de courbes (184) le long de l'axe X il obtient les bases (197) pour deux intégrales suivantes (204) et (206) et par la substitution de l'exposant n par $n+1$ dans la suite susmentionnée finie de courbes (157) et par la translation de la branche droite de ces courbes le long de l'axe X il arrive à la suite de courbes (209) qui forment la base des intégrales (213) et (215). Par la substitution de l'exposant n par $n+1$ et par les translations le long de l'axe X et de l'axe Y de la branche droite de courbes (132) il arrive aux courbes (220) qui forment la base des intégrales (236).

En rapport avec le fait que les polynômes nouvellement introduits contiennent deux arguments, l'auteur introduit aussi les polynômes de Bernoulli à deux arguments (259), (260) et (261). Il donne la nouvelle intégrale (269) qui représente la génératrice des nombres de Bernoulli. Il décompose les deux espèces de polynômes de Bernoulli à deux arguments en polynômes ${}^1A_\nu^n(\alpha, \beta)$ (262) et polynômes ${}^\circ B_\nu^n(\alpha, \beta)$ (273). Il démontre la convergence uniforme (254) des suites parallèles à la diagonale principale dans le schéma (237) et il établit es formules (255) et (256) pour les polynômes de Nielsen.

LITERATURA

[1] Niels Nielsen:

Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Paris, 1923, str. 28.

[2] L. Euler:

Institutiones calculi differentialis, Petrograd, 1755 str. 487—491.

[3] E. Cesàro:

Lehrbuch der Algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung, Leipzig, 1904, str. 872—873.

[4] B. S. Tomić:

Sur une classe des polynômes et sur les intégrales s'y rattachant, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Serija II, T. 9, Zagreb 1954, Broj 3 — 4, str. 229 — 243.

[5] R. Deaux et M. Delcourte:

Calcul des intégrales

$$(m, n) = \int_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^n}\, dx, \quad m \text{ et } n$$

entiers positifs, $m \geqslant n$.
Mathesis, Tome LXVI — Année 1957
Nos 1 — 2 — 3, str. 18

Tehnički urednik i korektor
ŽIVORAD VUJIĆ

Slagač
GRADIMIR SAVIĆ

Tiraž: 600 primeraka

Štampanje završeno aprila 1960 god. u Beogradskom grafičkom zavodu—Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17.