PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 37 (1960)

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ Д. С. МИТРИНОВИЧА ИЗУЧЕННОЕ ТАКЖЕ Я. АЦЕЛЬЕМ

Октавиан Эм. Георгиу

(Поступило 1-II 1960)

1. В 1956 году *Д. С. Митринович* [3] встретил и изучил функциональное уравнение

$$F_1(x)+G_1(y)=F_2(x)\,G_2(y) \tag{1}$$

для которого дал общее решение через непрерывные и дифференцируемые функции.

В одной статье вышедшей в 1958 году *Я. Ацель* [2] на стр. 97, §5, снова рассмотрел функциональное уравнение *Д. С. Митриновича* (1) и в очень широких условиях, не предполагая ничего о четырех функциях из (1), дал общее решение составленное из два семейства решений

$$F_1(x)=a,\ \ G_1(y)=b\,G_2(y)-a,\ \ F_2(x)=b,\ \ G_2(y)=\text{произвольная}, \tag{2}$$

$$F_1(x)=d\,F_2(x)-c,\ \ G_1(y)=c,\ \ F_2(x)=\text{произвольная},\ \ G_2(y)=d, \tag{3}$$

где a, b, c, d суть произвольные постоянные величины.

2. В настоящей заметке рассматриваем следующую систему функциональных уравнений

$$\begin{aligned} A_1(x)+C_1(y)&=A_2(x)\,C_2(y)+k\,B_2(x)\,D_2(y),\\ B_1(x)+D_1(y)&=A_2(x)\,D_2(y)+B_2(x)\,C_2(y)-\lambda\,B_2(x)\,D_2(y), \end{aligned} \tag{4}$$

которая содержит восемь вещественных функций одной переменной и две произвольные постоянные величины k и λ. Семейства решений системы (4) в смысле *Я. Ацельа* [2] отличаются по предположениям

$$\lambda^2+4k>0,\ \ \lambda^2+4k=0\ \text{ и }\ \lambda^2+4k<0.$$

Чтобы видеть это приводим систему (4) к равносильной ей системе

$$\begin{aligned} H_1(x)+K_1(y)&=H_2(x)\,K_2(y)+\frac{1}{4}(\lambda^2+4k)\,B_2(x)\,D_2(y),\\ B_1(x)+D_1(y)&=H_2(x)\,D_2(y)+B_2(x)\,K_2(y), \end{aligned} \tag{5}$$

где мы обозначили

$$(6)\qquad \begin{aligned} H_1(x)&=A_1(x)-\frac{\lambda}{2}B_1(x); & K_1(y)&=C_1(y)-\frac{\lambda}{2}D_1(y),\\ H_2(x)&=A_2(x)-\frac{\lambda}{2}B_2(x); & K_2(y)&=C_2(y)-\frac{\lambda}{2}D_2(y). \end{aligned}$$

3. В предположении $\lambda^2+4k=p^2>0$ вводим функции

$$(7)\qquad \begin{aligned} M_1(x)&=H_1(x)+\frac{1}{2}pB_1(x); & N_1(x)&=H_1(x)-\frac{1}{2}pB_1(x),\\ M_2(x)&=H_2(x)+\frac{1}{2}pB_2(x); & N_2(x)&=H_2(x)-\frac{1}{2}pB_2(x),\\ P_1(y)&=K_1(y)+\frac{1}{2}pD_1(y); & Q_1(y)&=K_1(y)-\frac{1}{2}pD_1(y),\\ P_2(y)&=K_2(y)+\frac{1}{2}pD_2(y); & Q_2(y)&=K_2(y)-\frac{1}{2}pD_2(y) \end{aligned}$$

и тогда система (5) имеет следующий вид

$$(8)\qquad \begin{aligned} M_1(x)+P_1(y)&=M_2(x)P_2(y),\\ N_1(x)+Q_1(y)&=N_2(x)\,Q_2(y). \end{aligned}$$

Система (8) повторяет функциональное уравнение (1) и допускает в очень широких условиях в смысле *Я. Ацельа*, следующие семейства в качестве общего решения:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{aligned} &M_1(x)=a;\ P_1(y)=bP_2(y)-a;\ M_2(x)=b;\ P_2(y)=\text{произвольная},\\ &N_1(x)=\alpha;\ Q_1(y)=\beta\,Q_2(y)-\alpha;\ N_2(x)=\beta;\ Q_2(y)=\text{произвольная}; \end{aligned}$$

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{aligned} &M_1(x)=a;\ P_1(y)=bP_2(y)-a;\ M_2(x)=b;\ P_2(y)=\text{произвольная},\\ &N_1(x)=\delta N_2(x)-\gamma;\ Q_1(y)=\gamma;\ N_2(x)=\text{произвольная};\ Q_2(y)=\delta; \end{aligned}$$

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{aligned} &M_1(x)=d\,M_2(x)-c;\ P_1(y)=c;\ M_2(x)=\text{произвольная};\ P_2(y)=d,\\ &N_1(x)=\alpha;\ Q_1(y)=\beta\ \ Q_2(y)-\alpha;\ N_2(x)=\beta;\ Q_2(y)=\text{произвольная}; \end{aligned}$$

$$(\mathrm{IV})\qquad \begin{aligned} &M_1(x)=d\,M_2(x)-c;\ P_1\,y=c;\ M_2(x)=\text{произвольная};\ P_2(y)=d,\\ &N_1(x)=\delta\,N_2(x)-\gamma;\ Q_1(y)=\gamma;\ N_2(x)=\text{произвольная};\ Q_2(y)=\delta, \end{aligned}$$

где a, b, c, d, α, β, γ, δ суть произвольные постоянные величины.

Возвращаясь через (7) и (6) к первоначальным функциям $A_i(x)$, $B_i(x)$, $C_i(y)$, $D_i(y)$, $(i=1,2)$ имеем следующие семейства общих решений в предположении $\lambda^2+4k=p^2>0$:

1°

$$A_1(x)=\frac{a+\alpha}{2}+\frac{\lambda}{p}\frac{a-\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)a+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)\alpha,$$

$$A_2(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)b+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)\beta,$$

$$B_1(x)=\frac{1}{p}(a-\alpha);\quad B_2(x)=\frac{1}{p}(b-\beta),$$

$$C_1(y)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)(b\,P_2(y)-a)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)(\beta\,Q_2(y)-\alpha),$$

$$C_2(y)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)P_2(y)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)Q_2(y),$$

$$D_1(y)=\frac{1}{p}[b\,P_2(y)-\beta\,Q_2(y)-a+\alpha];\quad D_2(y)=\frac{1}{p}[P_2(y)-Q_2(y)];$$

2°

$$A_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)a+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)[\delta\,N_2(x)-\gamma],$$

$$A_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)b+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)N_2(x);\ B_1=\frac{1}{p}[a-\delta\,N_2(x)+\gamma],$$

$$B_2=\frac{1}{p}[b-N_2(x)];\quad C_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)[b\,P_2(y)-a]+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)\gamma,$$

$$C_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)P_2(y)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)\delta,$$

$$D_1=\frac{1}{p}[b\,P_2(y)-a-\gamma];\quad D_2=\frac{1}{p}[P_2(y)-\delta];$$

3°

$$A_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)[d\,M_2(x)-c]+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)\alpha,$$

$$A_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)M_2(x)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)\beta,$$

$$B_1=\frac{1}{p}[d\,M_2(x)-c-\alpha];\quad B_2=\frac{1}{p}[M_2(x)-\beta],$$

$$C_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)c+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)[\beta\,Q_2(y)-\alpha],$$

$$C_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)d+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)Q_2(y),$$

$$D_1=\frac{1}{p}[c-\beta\,Q_2(y)+\alpha];\quad D_2=\frac{1}{p}[d-Q_2(y)];$$

4°

$$A_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)[dM_2(x)-c]+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)[\delta N_2(x)-\gamma],$$

$$A_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)M_2(x)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)N_2(x),$$

$$B_1=\frac{1}{p}[dM_2(x)-\delta N_2(x)-c+\gamma];\quad B_2=\frac{1}{p}[M_2(x)-N_2(x)],$$

$$C_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)c+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)\gamma,$$

$$C_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)d+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{p}\right)\delta,$$

$$D_1=\frac{1}{p}(c-\gamma);\quad D_2=\frac{1}{p}(d-\delta).$$

4. В предположении $\lambda^2+4k=0$ система (5) принимает вид

$$\begin{aligned}H_1(x)+K_1(y)&=H_2(x)K_2(y),\\ B_1(x)+D_1(y)&=B_2(x)K_2(y)+H_2(x)D_2(y).\end{aligned}\tag{9}$$

Вводя дуальные функции одной вещественной переменной

$$\begin{aligned}M_1(x)&=H_1(x)+\varepsilon B_1(x),\\ M_2(x)&=H_2(x)+\varepsilon B_2(x),\\ P_1(y)&=K_1(y)+\varepsilon D_1(y),\\ P_2(y)&=K_2(y)+\varepsilon D_2(y),\end{aligned}\tag{10}$$

где ε есть гиперкомплексная единица Э. *Стюди* [4], удовлетворяющая характеристичном уравнению $\varepsilon^2=0$, тогда из (9) получаем уравнение

$$M_1(x)+P_1(y)=M_2(x)P_2(y)$$

в дуальных функциях (10). Общее решение в смысле *Я. Ацельа* этого функционального уравнения в дуальных функциях есть

$$\begin{aligned}&M_1(x)=a+\varepsilon\alpha;\quad P_1(y)=(b+\varepsilon\beta)P_2(y)-a-\varepsilon\alpha;\\ &M_2(x)=b+\varepsilon\beta;\quad P_2(y)=\text{произвольная};\end{aligned}\tag{V}$$

$$\begin{aligned}&M_1(x)=(d+\varepsilon\delta)M_2(x)-c-\varepsilon\gamma;\quad P_1(y)=c+\varepsilon\gamma;\\ &M_2(x)=\text{произвольная};\quad P_2(y)=d+\varepsilon\delta,\end{aligned}\tag{VI}$$

где a, α, b, β, c, γ, d, δ суть вещественные постоянные величины.

Возвращаясь к первоначальным функциям из системы (4) имеем следующие семейства вещественных решений в предположении $\lambda^2+4k=0$:

$$5^\circ\quad \begin{aligned}&A_1(x)=a+\frac{\lambda}{2}\alpha;\ \ B_1(x)=\alpha;\ \ A_2(x)=b+\frac{\lambda}{2}\beta;\ \ B_2(x)=\beta;\\ &C_1(y)=\left(b+\frac{\lambda}{2}\beta\right)C_2-\frac{\lambda^2}{4}\beta D_2-a-\frac{\lambda}{2}\alpha;\quad C_2(y)=\text{произвольная};\\ &D_1(y)=\beta C_2(y)+\left(b-\frac{\lambda}{2}\beta\right)D_2(y)-\alpha;\quad D_2(y)=\text{произвольная};\end{aligned}$$

$$6^\circ\quad \begin{aligned}&A_1(x)=\left(d+\frac{\lambda}{2}\delta\right)A_2(x)-\frac{\lambda^2}{4}\delta B_2(x)-c-\frac{\lambda}{2}\gamma;\quad A_2(x)=\text{произвольная};\\ &B_1(x)=\delta A_2(x)+\left(d-\frac{\lambda}{2}\delta\right)B_2(x)-\gamma;\quad B_2(x)=\text{произвольная};\\ &C_1(y)=c+\frac{\lambda}{2}\gamma;\quad C_2(y)=d+\frac{\lambda}{2}\delta;\\ &D_1(y)=\gamma;\quad D_2(y)=\delta.\end{aligned}$$

5. В предположении $\lambda^2+4k=-p^2<0$ вводим комплексные функции вещественной переменной

$$(11)\qquad \begin{aligned}&M_1(x)=H_1(x)+i\frac{p}{2}B_1(x),\\ &M_2(x)=H_2(x)+i\frac{p}{2}B_2(x),\\ &P_1(y)=K_1(y)+i\frac{p}{2}D_1(y),\\ &P_2(y)=K_2(y)+i\frac{p}{2}D_2(y).\end{aligned}\qquad (i^2=-1)$$

и система (5) сводится к одном функциональном уравнению вида (1)

$$M_1(x)+P_1(y)=M_2(x)P_2(y).$$

Общее комплексное решение этого функционального уравнения есть

$$(\mathrm{VII})\qquad \begin{aligned}&M_1(x)=a+i\alpha;\ \ P_1(y)=(b+i\beta)P_2(y)-a-i\alpha;\\ &M_2(x)=b+i\beta;\ \ P_2(y)=\text{произвольная};\end{aligned}$$

$$\text{(VIII)}\quad \begin{aligned} &M_1(x)=(d+i\delta)\,M_2(x)-c-i\gamma;\ \ P_1(y)=c+i\gamma;\\ &M_2(x)=\text{произвольная};\ \ P_2(y)=d+i\delta, \end{aligned}$$

где a, α, b, β, c, γ, d, δ суть вещественные постоянные величины.

Возвращаясь к функциам $A_1(x)$, $A_2(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$, $C_1(y)$, $C_2(y)$, $D_1(y)$, $D_2(y)$ имеем следующие семейства вещественных решений в предположении $\lambda^2+4k=-p^2<0$:

$$7^\circ\quad \begin{aligned} &A_1(x)=a+\frac{\lambda}{p}\alpha;\ \ A_2(x)=b+\frac{\lambda}{p}\beta.\\ &B_1(x)=\frac{2\alpha}{p};\ \ B_2(x)=\frac{2\beta}{p},\\ &C_1(y)=\left(b+\frac{\lambda}{p}\beta\right)C_2(y)+\frac{2k}{p}\beta\,D_2(y)-a-\frac{\lambda}{p}\alpha,\\ &C_2(y)=\text{произвольная};\ \ D_2(y)=\text{произвольная},\\ &D_1(y)=\frac{2\beta}{p}C_2(y)+\left(b-\frac{\lambda}{p}\beta\right)D_2(y)-\frac{2\alpha}{p}; \end{aligned}$$

$$8^\circ\quad \begin{aligned} &A_1(x)=\left(d+\frac{\lambda}{p}\delta\right)A_2(x)+\frac{2k}{p}\delta\,B_2(x)-c-\frac{\lambda}{p}\gamma;\ A_2(x)=\text{произвольная};\\ &B_1(x)=\frac{2\delta}{p}A_2(x)+\left(d-\frac{\lambda}{p}\delta\right)B_2(x)-\frac{2\gamma}{p};\ \ B_2(x)=\text{произвольная};\\ &C_1(y)=c+\frac{\lambda}{p}\gamma;\ \ C_2(y)=d+\frac{\lambda}{p}\delta;\\ &D_1(y)=\frac{2\gamma}{p};\ D_2(y)=\frac{2\delta}{p}; \end{aligned}$$

6. В заключении, система функциональных уравнений (4) составленная от двух функциональных уравнений с восемью незнакомых вещественных функций одной вещественной переменной, имеющий в своей структуре и две вещественные постоянные величины, имеет в очень широких условиях относительно неизвестных функций, короче в смысле *Я. Ацельа*, восемь семейств общих решений: четыре семейства в гиперболическом предположении, два семейства в параболическом предположении и два семейства в эллиптическом предположении. Каждое семейство содержит кроме вещественных постоянных еще по две произвольные вещественные функции одной вещественной переменной.

Тимишоарский политехнический институт
Румынская Народная Республика

RÉSUMÉ

SUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES QUI GÉNÉRALISE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE D. S. MITRINOVITCH, ÉTUDIÉE AUSSI PAR J. ACZÉL

O. E Gheorgiu

L'auteur étudie le système d'équations fonctionnelles (4), qui représente une généralisation matricielle de l'équation fonctionnelle (1) de *D. S. Mitrinovitch*.

On trouve trois groupes de solutions, suivant que le binôme λ^2+4k est positif ($1°-4°$), nul ($5°-6°$) ou négatif ($7°-8°$). Ces familles de solutions contiennent des constantes arbitraires et des fonctions arbitraires. La méthode utilisée est celle de la reduction du système (4) à l'équation fonctionnelle (1), pour laquelle on écrit la solution d'après *J. Aczél*.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Ацель:

Успехи математических наук, том 11, выпуск 3 (69), 1956, стр. 1—66.

[2] J. Aczél:

Mathematische Nachrichten, Band 19, Heft 1—6, Juli—Dezember 1958, S. 87—99

[3] D. S. Mitrinović:

Publikacije Elektrotehn. Fak. Univ. u Beogradu, Ser. Matem. i Fiz., Nr. 5 (1956), p. 1—8

[4] E. Study:

Monatsh. für Math. und. Phys. 1890, S. 283—355.