PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA - SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 35 (1960)

O GENERALIZACIJI FEJÉR — JACKSON-OVE NEJEDNAKOSTI

Dragomir Đoković

(Primljeno 15 januara 1960)

1. *Fejér* je bez dokaza postavio sledeću nejednakost

$$S(n,x) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \sin \nu x > 0 \quad (x \in (0,\pi)). \tag{1}$$

D. Jackson u jednom svom članku[1] daje, između ostalog, dokaz nejednakosti (1).

Ovde ćemo navesti jedan novi dokaz ove nejednakosti koji nam izgleda prirodniji i jednostavniji od *Jackson*-ovog.

Smatraćemo da je funkcija definisana na otvorenom intervalu $(0,\pi)$. Ideja dokaza je u tome što ćemo dokazati da su svi minimumi funkcije $S(n,x)$, ako oni uopšte postoje, pozitivni.

Za $n=1$ relacija (1) postaje:

$$\sin x > 0 \quad (x \in (0,\pi))$$

i ona je tačna.

Uvedimo induktivnu pretpostavku da je relacija (1) tačna za $n=k-1$ $(k \geqslant 2)$ i ispitajmo da li je ta relacija tačna za $n=k$.

Posmatrajmo izvod

$$\frac{d}{dx} S(k,x) = \sum_{\nu=1}^{k} \cos \nu x = \frac{\sin \frac{kx}{2} \cos \frac{k+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Funkcija $\sin \frac{kx}{2}$ $(x \in (0,\pi))$ ima $r = \left[\frac{k-1}{2}\right]$ nula:

$$\alpha_\nu = \frac{2\pi}{k} \nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, r).$$

[1] D. Jackson: *Über eine trigonometrische Summe* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 32, 1911, p. 257-266).

Funkcija $\cos\frac{k+1}{2}x \quad (x\in(0,\pi))$ ima $r+1$ nula:

$$\beta_\mu=\frac{\pi}{k+1}(2\mu+1)\qquad(\mu=0,1,2,\ldots,r).$$

Dokazaćemo da funkcija $S(k,x)$ u tačkama α_ν ima minimume, a u tačkama β_μ maksimume.

Drugi izvod funkcije $S(k,x)$ je

$$\frac{d^2}{dx^2}S(k,x)=\frac{\sin\frac{x}{2}\left(\frac{k}{2}\cos\frac{kx}{2}\cos\frac{k+1}{2}x-\frac{k+1}{2}\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{k+1}{2}x\right)-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{kx}{2}\cos\frac{k+1}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}},$$

odakle sleduje

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}S(k,x)\right]_{x=\alpha_\nu}=\frac{\frac{k}{2}\cos\frac{k\alpha_\nu}{2}\cos\frac{k+1}{2}\alpha_\nu}{\sin\frac{\alpha_\nu}{2}}=\frac{\frac{k}{2}\cos\nu\pi\cos\left(\nu\pi+\frac{\pi\nu}{k}\right)}{\sin\frac{\pi\nu}{k}}$$

$$=\frac{k}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\pi\nu}{k}}{\sin\frac{\pi\nu}{k}}=\frac{k}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi\nu}{k}>0,$$

jer je
$$\frac{\pi\nu}{k}\leqslant\frac{\pi r}{k}=\frac{\pi}{2k}\cdot 2r\leqslant\frac{\pi}{2k}\cdot(k-1)<\frac{\pi}{2}.$$

Dalje će biti

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}S(k,x)\right]_{x=\beta_\mu}=-\frac{\frac{k+1}{2}\sin\frac{k\beta_\mu}{2}\sin\frac{k+1}{2}\beta_\mu}{\sin\frac{\beta_\mu}{2}}$$

$$=-\frac{\frac{k+1}{2}\sin\left(\pi\mu+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\,\frac{2\mu+1}{k+1}\right)\sin\left(\pi\mu+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\mu+1}{k+1}}=-\frac{k+1}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{2\mu+1}{k+1}\right)<0,$$

jer je
$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\mu+1}{k+1}\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2r+1}{k+1}\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k-1+1}{k+1}<\frac{\pi}{2}.$$

Dakle, minimumi funkcije $S(k,x)$ su

$$S(k,\alpha_\nu)=S\left(k,\frac{2\nu\pi}{k}\right)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\sin i\,\frac{2\nu\pi}{k}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}\sin i\,\frac{2\nu\pi}{k}=S(k-1,\alpha_\nu).$$

Na osnovu induktivne pretpostavke je $S(k-1, \alpha_\nu) > 0$, što znači da su i svi minimumi funkcije $S(k, x)$ pozitivni, pa je, prema tome, $S(k, x) > 0$ $(x \in (0, \pi))$.

Time je induktivni dokaz nejednakosti (1) završen.

2. Primenom nejednakosti (1) možemo dobiti još nekoliko zanimljivih nejednakosti.

Nejednakost (1) možemo napisati i ovako:

$$\int_0^x \frac{\sin \frac{n}{2} x \cos \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} dx > 0 \qquad (x \in (0, \pi)). \tag{2}$$

Stavimo li ovde $x = \frac{2\pi}{n} \nu$, gde je $\nu = 1, 2, 3, \ldots, r \left(= \left[\frac{n-1}{2} \right] \right)$, biće

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n}\nu} \frac{\sin \frac{n}{2} x \cos \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} dx > 0.$$

Odavde izlazi

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n}\cdot\nu} \left(\sin nx \operatorname{cotg} \frac{x}{2} + \cos nx - 1 \right) dx > 0,$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n}\cdot\nu} \sin nx \operatorname{cotg} \frac{x}{2}\, dx > \frac{2\pi}{n} \cdot \nu.$$

$$\therefore \int_0^{\nu\pi} \frac{\sin 2t \operatorname{cotg} \frac{t}{n}\, dt}{\nu\pi} > 1 \qquad \left(\nu = 1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{n-1}{2} \right] \right).$$

Posmatrajmo funkciju

$$F_1(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\sin \nu x}{\nu} \right)^2.$$

Dokazaćemo da je na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ funkcija $F_1(x)$ rastuća. Posmatrajmo njen izvod

$$F_1'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2 \sin \nu x \cos \nu x}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin (\nu \cdot 2x)}{\nu} \geqslant 0.$$

Dakle, možemo pisati nejednakost

$$F_1(x_2) - F_1(x_1) > 0 \quad \left(x_2 > x_1, \quad x_2, x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Ovoj nejednakosti odgovaraju sledeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^2} (\sin^2 \nu x_2 - \sin^2 \nu x_1) > 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu (x_2 + x_1)}{\nu} \cdot \frac{\sin \nu (x_2 - x_1)}{\nu} > 0.$$

Stavimo li $x_2 + x_1 = \theta_1$ i $x_2 - x_1 = \theta_2$, dobijamo

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu\theta_1}{\nu} \cdot \frac{\sin \nu\theta_2}{\nu} > 0 \qquad (0 < \theta_1, \theta_2; \quad \theta_1 + \theta_2 \leqslant \pi)$$

Posmatrajući funkciju:

$$F_2(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu\theta_1}{\nu} \cdot \left(\frac{\sin \nu x}{\nu}\right)^2 \text{ na segmentu } \left[0, \frac{\pi - \theta_1}{2}\right],$$

došli bismo do nejednakosti

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu\theta_1}{\nu} \frac{\sin \nu\theta_2}{\nu} \frac{\sin \nu\theta_3}{\nu} > 0 \qquad (0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3; \ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \leqslant \pi).$$

Na taj način naslućujemo da važi nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{\nu=1}^{m} \frac{\sin k\theta_\nu}{k}\right) > 0 \qquad \left(0 < \theta_\nu < \pi, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m; \ \sum_{\nu=1}^{m} \theta_\nu \leqslant \pi\right). \tag{3}$$

Primenom metoda matematičke indukcije dokazuje se da je ova nejednakost zaista tačna.

Prof. *D. S. Mitrinović* i docent *M. Popadić* stavili su neke primedbe na prvobitni tekst ovog članka i, zahvaljujući tome, rezultati su bolje precizirani i upotpunjeni.

RÉSUMÉ

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE L'INÉGALITÉ DE FEJÉR — JACKSON

Dragomir Đoković

Dans cette Note on donne une nouvelle démonstration de l'inégalité (1), indiquée par *Fejér* et démontrée par *Jackson*.[1]

La démonstration qu'on y donne est plus courte et plus élégante que celle de *Jackson*.

On y indique également l'inégalité (3), généralisant celle de (1).