PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SERIE: MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 3 (1956)

PRILOZI PROUČAVANJU PROBLEMA DVAJU TELA SA PROMENLJIVIM ZBIROM MASA

Dobrivoje Mihailović

I. OSNOVNA VEKTORSKA JEDNAČINA DINAMIKE TAČKE S PROMENLJIVOM MASOM. — PROBLEM DVAJU TELA S PROMENLJIVIM ZBIROM MASA

Dinamika tačke promenljive mase tretira probleme kretanja u mehanici i tehnici kod kojih se u procesu kretanja tačke ovoj ili priključuju ili od nje otpadaju nove mase.

Osnovna vektorska diferencijalna jednačina Dinamike tačke promenljive mase *u formi Meščerskog* [1] ima oblik

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=\mathfrak{F}+\overrightarrow{\Phi}, \tag{1.1}$$

gde je $m=m(t)$, $\mathfrak{v}$ – je vektor brzine mase $m(t)$ u momentu t, $\mathfrak{F}$ – rezultujuća sila, a $\overrightarrow{\Phi}$ tzv. reaktivna sila. Reaktivna sila $\overrightarrow{\Phi}$ pretstavljena je vektorom

$$\overrightarrow{\Phi}=\frac{dm}{dt}\mathfrak{c}, \tag{1.2}$$

gde je

$$\mathfrak{c}=\mathfrak{u}-\mathfrak{v}$$

i gde $\mathfrak{u}$ pretstavlja apsolutnu brzinu mase $dm(t)$, a $\mathfrak{c}$ relativnu brzinu mase koja se priključuje masi $m(t)$.

U specijalnom slučaju, kada je apsolutna brzina $\mathfrak{u}=0$, je

$$\mathfrak{c}=-\mathfrak{v}$$

pa jednačina (1.1) dobija oblik:

$$\frac{d}{dt}(m\mathfrak{v})=\mathfrak{F}, \tag{1.3}$$

ovo je *jednačina Levi—Civita.*

Za slučaj, kada je relativna brzina $c=0$, prema (1.2) reaktivna sila ima vrednost

$$\vec{\Phi}=0,$$

pa se jednačina svodi na jednačinu po obliku identičnu sa jednačinom kretanja tačke sa stalnom masom:

$$m(t)\frac{dv}{dt}=\mathfrak{F} \tag{1.4}$$

koja pretstavlja tzv. *Gyldèn-ovu jednačinu.*

Diferencijalne jednačine Dinamike sistema i čvrstog tela s promenljivom masom ovde nećemo navoditi, jer ih u daljem izlaganju nećemo koristiti. Napomenimo da, pored primena u fizici (na pr. kod problema kretanja ledene sante čijoj se osnovnoj masi pridodaju nove, odnosno od ove otpadaju mase usled smrzavanja odnosno zagrevanja; kod proučavanja kretanja suda s tečnošću koja isparava i dr.), naročito značajne primene Dinamika tačke i sistema s promenljivom masom ima u tehnici (problem rakete i dr.)

Problem dvaju tela s promenljivim zbirom masa u najširem smislu reči tretira relativno kretanje jedne materijalne tačke s promenljivom masom u odnosu na drugu tačku promenljive mase, pri čemu se njihovi međusobni uticaji pokoravaju zakonu gravitacije.

Rezultati istraživačkog rada na ovome problemu imaju i svog praktičnog značaja i smisla u prvom redu kod proučavanja binarnih zvezdanih sistema, kao i postanka Sunčeva sistema. Stoga je taj rad vezan za imena astronoma i matematičara i to u znatnoj meri italijanskih i ruskih. Tako je već 1911 god. *G. Armellini* publikovao raspravu [2] u kojoj tretira ovaj problem. Ako se prati dalji rad na ovome problemu od značaja je da se podvuče, da taj rad postaje izrazito intenzivan tridesetih godina i produžava se u toku sledećih deset godina da bi poslednjih godina postao ponovo aktuelan. Među naučnim radnicima na ovome problemu treba istaći: *Levi—Civita, Burgatti-a, Armellini-a, D. Graffi-a, E. De Caro, Dubošin-a, Batirev-a* i dr. Navešćemo samo neke od značajnijih radova ovih naučnika.

D. Graffi u svojoj raspravi [3] proučava onaj slučaj problema dvaju tela s promenljivim masama, u kome se masa kao funkcija vremena menja po zakonu

$$\frac{dm}{dt}=-am^3, \qquad (a=\text{const.})$$

Graffi je proučio varijaciju ekscentriciteta, modula vektora relativnog položaja jedne mase u odnosu na drugu i živu silu (periodična funkcija ekscentrične anomalije sa periodom 2π), pri čemu je neke od rezultata dobio drugim putem nego što je to pre njega učinio *Burgatti.*

Poslednjih godina je *D. Graffi* publikovao raspravu [4] koja pretstavlja nastavak njegovog rada na problemu dvaju tela s promenljivim masama u periodu od ranijih 20 godina.

Na naročiti značaj problema sa promenljivim masama za praktične probleme Astrofizike i savremene astronomije ukazali su sovjetski astrofizičar

Ambarcumijan i astronom *Fesenkov* na internacionalnom kongresu astronoma u Rimu (septembra 1952 god.). *Fesenkov* je podvukao značaj korpuskularnog zračenja kao faktora u evoluciji Sunčeva i zvezdanih sistema.

S ovim u vezi *G. Armellini* u [5] proučava slučaj problema dvaju tela s promenljivim zbirom masa, pri čemu masa sistema opada tako da je

$$\lim_{t \to \infty} M(t) = \lim_{t \to \infty} t \cdot M(t) = 0$$

i pokazuje da ekscentricitet ne može imati konačnu vrednost.

G. Armellini je ovde proučio i slučaj binarnih zvezdanih sistema, pretpostavljajući da je

$$\frac{dM}{dt} = -\varepsilon M \qquad (\varepsilon = \text{const.} > 0).$$

Odavde dobijena funkcija $M(t) = M(0)e^{-\varepsilon t}$ ispunjava gornji uslov tj.

$$\lim_{t \to \infty} M(t) = \lim_{t \to \infty} t\, M(t) = 0.$$

Nastavljajući rad u tom smislu *Armellini* je u drugoj svojoj raspravi [6] pošao od *Gyldén-ove* jednačine

$$m(t)\,\frac{dv}{dt} = \mathfrak{F}$$

i posmatrao jedan par zvezda kod koga je u momentu t_0 velika poluosa a_0, a ekscentricitet e_0, a u momentu $t_1 > t_0$ je velika poluosa a_1, i ekscentricitet e_1. Za vreme $t_1 - t_0$, usled kortuskularnog zračenja, mase sistema u momentima t_0 i t_1 su M_0 odnosno M_1, pri čemu je $M_1 < M_0$. *Armellini* je utvrdio da je tada $a_1 > a_0$ i $e_1 > e_0$, što je u skladu sa posmatranjem zvezdanih parova.

E. De Caro je u članku [7] posmatrao relativno kretanje jedne mase m_1 u odnosu na drugu m_2 koje se menjaju po zakonu

$$m_1 = m^0{}_1\, e^{\alpha t}, \qquad m_2 = m^0{}_2 e^{\alpha t}$$

i dao izraze koji na sasvim jednostavan način vezuju elemente eliptičnog kretanja za proizvoljan momenat vremena sa njihovim vrednostima za inicijalni momenat.

Prilozi proučavanju problema dvaju tela sa promenljivim zbirom masa, koji čine sadržinu ovoga rada stoje u direktnoj vezi sa radovima dvojice sovjetskih naučnika: *G. N. Dubošin-a* i *A. A. Batirev-a.*

G. N. Dubošin je u svome radu [8] tretirao problem za opšti slučaj promene mase sistema $M = M(t)$ po zakonu *Meščerskog*, dokazavši neke važne stavove u vezi sa karakterom putanja dvaju tela, a pod uslovima koje mora ispuniti funkcija $M(t)$.

Autor neposredno nastavlja, uopštava i dopunjava rezultate *Batirev-a* publikovane u članku [9]. S obzirom na to u *drugom odeljku* izložen je metod *Batirev-a* za kvalitativnu analizu putanja u problemu s promenljivim zbirom masa.

U trećem odeljku su date opštije transformacije kojima se problem sa promenljivim svodi na problem sa stalnim masama i iz ovih su transformacije *Batirev-a* izvedene kao specijalan slučaj.

U četvrtom odeljku je u vezi sa kvalitativnom analizom putanja pokazano, da su sektorske brzine u odgovarajućim tačkama na spiralnoj putanji i koničnom preseku jednake, a da su orijentacije ravni ovih putanja i smerovi obilaženja po njima suprotni.

U petom odeljku je upotrebljena Milankovićeva grupa vektorskih elemenata i date su konačne jednačine kretanja posebno za eliptični, hiperbolični i parabolični tip kretanja.

U šestom odeljku autor tretira slučaj, kad masa sistema zavisi od rastojanja dveju masa. Za taj slučaj određena je putanja i dato rešenje problema. Za specijalni oblik funkcije $M=\Phi(s)$, problem postaje identičan sa problemom koji tretira *Radzievski*.

2. METOD BATIREV-A ZA REDUKCIJU PROBLEMA S PROMENLJIVIM MASAMA I KVALITATIVNU ANALIZU OBLIKA PUTANJA

Pretpostavimo da se tačka A sa promenljivom masom m_1 kreće pod dejstvom sile gravitacije relativno prema drugoj tački B promenljive mase m_2. Neka je relativni položaj tačke A prema B određen vektorom položaja $\mathfrak{r}(x, y)$, pri čemu je $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(t)$.

Vektorska diferencijalna jednačina relativnog kretanja tačke A u odnosu na tačku B ima oblik:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}=-\frac{f(m_1+m_2)}{s^3}\mathfrak{r}, \quad (s=|\mathfrak{r}|), \tag{2.1}$$

ili

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}=-\frac{fM}{s^3}\mathfrak{r}, \tag{2.2}$$

pri čemu masa sistema $M=m_1+m_2$ ne pretstavlja konstantu, već funkciju vremena.

Princip na kome je *A. A. Batirev* pristupio kvalitativnoj analizi oblika putanja u problemu dvaju tela sa promenljivim zbirom masa [9] zasniva se na tome, da se pre svega utvrdi takav zakon promene mase sistema $M=M(t)$ koji bi omogućio neposrednu redukciju problema na problem dvaju tela sa stalnim zbirom masa. Za ovaj zakon, mesto ranije korišćenog zakona *Meščerskog*, uzima *Batirev* funkciju oblika

$$M=\frac{M_0}{1+\alpha t}, \tag{2.3}$$

gde je $M_0=\text{const.}$, a $\alpha>0$ (slučaj opadajuće mase sistema).

Neka je vektorska funkcija $\mathfrak{x}(\xi, \eta)$ vezana sa vektorom $\mathfrak{r}$ relacijom $\mathfrak{x}$

$$\mathfrak{x}=\frac{1}{1+\alpha t}, \tag{2.4}$$

gde je
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\tau),$$
p i čemu je
$$\tau = \frac{1}{\alpha(1+\alpha t)}. \tag{2.5}$$

Ako se sada u vektorskoj diferencijalnoj jednačini (2 · 2) izvrši smena vektorske funkcije $\mathfrak{f}$ vektorom $\mathfrak{r}$, a nezavisno promenljive t novom promenljivom τ na osnovu relacija (2.3), (2.4) i (2.5) i ako se uzme $f = 1$ i $M_0 = 1$, tada će se ova jednačina transformisati u sledeću:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\tau^2} + \frac{\mathfrak{r}}{\rho^3} = 0, \quad (\rho = |\mathfrak{r}| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \tag{2.6}$$

koja pretstavlja jednačinu relativnog kretanja u problemu dvaju tela sa stalnim zbirom masa.

Pošto $\mathfrak{r}$ pretstavlja vektor položaja izvesne tačke P u ravni $\xi\eta$, to gornja transformacija se može interpretirati na taj način, što se tačka A, određena vektorom položaja $\mathfrak{f}$ prema tački B u ravni xy, preslikava na tačku P sa vektorom položaja $\mathfrak{r}$ u ravni $\xi\eta$. S obzirom na činjenicu da problem relativnog kretanja tačke P, definisan vektorskom jednačiom (2 · 6), pretstavlja već proučeni problem Nebeske mehanike, *Batirev* je bio u mogućnosti, da preslikavanjem putanja tačke P — koničnih preseka na ravan xy, prouči i oblike putanja u problemu dvaju tela sa promenljivim zbirom masa i ove klasifikuje u putanje eliptičnog, hiperboličnog i paraboličnog tipa.

Tako za slučaj kada se tačka P kreće po eliptičnoj putanji, *Batirev* je dobio jednačinu *putanje eliptičnog tipa* za tačku A (x, y) u obliku

$$r = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot (1 - e\cos E)}{p\alpha\,(q - E + e\sin E)}, \quad (e < 1) \tag{2.7}$$

gde je q integraciona konstanta, a E ekscentrična anomalija. Ova putanja će imati asimptotu, čiji je pravac određen vrednošću prave anomalije φ_1 iz poznate relacije

$$\operatorname{tg}\frac{E_1}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2},$$

pri čemu E_1 pretstavlja nulu Keplerove jednačine

$$q - E + e\sin E = 0.$$

Jednačina *putanje paraboličnog tipa* $(e = 1)$ je oblika:

$$r = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\varphi/2}{p\alpha\left[h - (\operatorname{tg}\varphi/2 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\varphi/2)\right]} \tag{2.8}$$

čiji je pravac asimptote određen nulom jednačine

$$\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2} + 3\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 3h = 0.$$

Za jednačinu putanje *hiperboličnog tipa Batirev* je dobio jednačinu oblika:

$$r=\frac{k(e-\cos F)}{\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{F}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-e \operatorname{tg} F+h\right]\cos F}, \tag{2.9}$$

pri čemu je E vezano sa pravom anomalijom φ relacijom oblika

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\cdot\operatorname{tg}\frac{F}{2}.$$

Jednačina (2.9) može se pisati i u obliku

$$r=\frac{k(e \operatorname{ch}\psi-1)}{\psi-e \operatorname{sh}\psi+h}, \tag{2.10}$$

gde je

$$\psi=\ln \operatorname{tg}\left(\frac{F}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Pravac asimptote putanje određuje se u ovom slučaju iz jednačine:

$$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{F}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-e \operatorname{tg} F+h=0.$$

Ako sa F_1 obeležimo nulu ove jednačine, to se F u jednačini putanje hiperboličnog tipa može menjati u intervalu

$$-\frac{\pi}{2}<F<F_1.$$

Napred navedenim transformacijama *Batirev* je znatno uprostio svoja ranija ispitivanja oblika putanja u problemu dvaju tela s pomenljivim zbirom masa izloženim u članku [18] · ([10]).

3. UOPŠTENJE TRANSFORMACIJA BATIREVA ZA REDUKCIJU PROBLEMA S PROMENLJIVIM ZBIROM MASA NA PROBLEM SA STALNIM MASAMA

U ovom odeljku biće izložen jedan opštiji način za redukciju problema dvaju tela s promenljivim zbirom masa na klasični problem dvaju tela koji je predložio autor u svojoj raspravi [11]. Mogućnost i postupak za ovu redukciju pretstavlja uopštenje transformacija (2.4) i (2.5) koje je primenio *Batirev* kod kvalitativne analize oblika putanja u ovome problemu.

Ako se pođe od vektorske diferencijalne jednačine relativnog kretanja tačke A promenljive mase m_1 u odnosu na tačku B promenljive mase m_2

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}=-\frac{m_1+m_2}{s^3}\mathfrak{s},\ (s=\overline{AB}=|\mathfrak{s}|), \tag{3.1}$$

tada celokupna masa sistema

$$M = m_1 + m_2 = M(t)$$

pretstavlja funkciju vremena, te jednačina (3.1) dobija oblik:

$$\frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2} = - \frac{M}{s^3} \mathfrak{s}. \tag{3.2}$$

Posmatrajmo pored vektor-funkcije $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}\ (t)$ jednu novu vektor-funkciju $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\ (\tau)$ takvu da između ove poslednje i funkcije $\mathfrak{s}\ (t)$ postoji zakon korespondencije

$$\mathfrak{r} = F(t) \cdot \mathfrak{s} \tag{3.3}$$

a između nezavisno promenljive t i nove promenljive τ da postoji relacija:

$$\tau = \varphi(t). \tag{3.4}$$

Neka se najzad masa sistema $M = m_1 + m_2$ menja po zakonu

$$M = M(t). \tag{3.5}$$

Pretpostavimo da u posmatranom vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$ funkcije $F(t)$ i $\varphi(t)$ ispunjavaju uslove

$$F(t) > 0, \quad \varphi'(t) \neq 0$$

i da $M(t)$ pretstavlja monotono-opadajuću funkciju vremena.

Pokazaćemo, da ako se u vektorskoj diferencijalnoj jednačini problema (3.2) smeni vreme t kao nezavisno promenljiva-novom nezavisno promenljivom τ na osnovu relacije (3.4), a vektor relativnog položaja $\mathfrak{s}$ smeni novom vektor funkcijom $\mathfrak{r}$ na osnovu (3.4), pri čemu se masa sistema menja po zakonu (3 · 5), tada se jednačina (3.2) može redukovati na oblik

$$\frac{d^2 \mathfrak{r}}{d\tau^2} + \frac{\mathfrak{r}}{\rho^3} = 0, \quad (\rho = |\mathfrak{r}|), \tag{3.6}$$

što znači da se problem dvaju tela sa promenljivim zbirom masa može svesti na klasični problem sa stalnim masama.

U tu svrhu potrebno je odrediti opšte oblike funkcija $F(t)$, $\varphi(t)$ i $M(t)$ tako, da se, posle zamene vektorske funkcije $\mathfrak{s}(t)$ novom vektorskom funkcijom $\mathfrak{r}(\tau)$ i vremena t — novom nezavisno-promenljivom τ, vektorska jednačina problema (3.2) može svesti na jednačinu (3.6).

Primetimo pre svega da je prema (3.4)

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\varphi'(t)}. \tag{3.7}$$

Diferenciranjem relacije (3.3) po τ, dobijamo:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \{F(t)\, \mathfrak{s}\} = \frac{d}{dt} \{F(t)\, \mathfrak{s}\} \cdot \frac{dt}{d\tau}. \tag{3.8}$$

Uzimajući u obzir (3.7), imaćemo:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\frac{1}{\varphi'(t)}\cdot\left\{F'(t)\mathfrak{j}+F(t)\cdot\frac{d\mathfrak{j}}{dt}\right\}. \tag{3.9}$$

Ako relaciju (3.9) ponovo diferenciramo po τ, dobićemo:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\tau^2}=\frac{d}{dt}\cdot\left\{\frac{1}{\varphi'(t)}\left[F'(t)\mathfrak{j}+F(t)\frac{d\mathfrak{j}}{dt}\right]\right\}\cdot\frac{dt}{d\tau},$$

ili prema (3.7):

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\tau^2}=\frac{1}{\varphi'(t)}\left\{\frac{\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\left[F'(t)\mathfrak{j}+F(t)\frac{d\mathfrak{j}}{dt}\right]+\frac{1}{\varphi'(t)}\left[F''(t)\mathfrak{j}+2F'(t)\frac{d\mathfrak{j}}{dt}+F(t)\frac{d^2\mathfrak{j}}{dt^2}\right]\right\},$$

ili

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}=\left\{-\frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}F'(t)+\frac{F''(t)}{\varphi'^2(t)}\right\}\cdot\mathfrak{j}+\left\{-\frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}F(t)+2\frac{F'(t)}{\varphi'^2(t)}\right\}\cdot\frac{d\mathfrak{j}}{dt}$$

$$+\frac{F(t)}{\varphi'^2(t)}\frac{d^2\mathfrak{j}}{dt^2}. \tag{3.10}$$

S druge strane, iz jednačine (3.3) proizilazi da su skalarne veličine vektora $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{j}$ vezane relacijom

$$\rho=F(t)\,s, \tag{3.11}$$

gde je po pretpostavci $F(t)>0$ u posmatranom vremenskom intervalu.

Na osnovu jednačina (3.3) i (3.11), kao i jednačine (3.5), desna strana jednačine kretanja (3.2) postaje

$$\frac{M}{s^3}\mathfrak{j}=\frac{M(t)}{\left[\frac{\rho}{F(t)}\right]^3}\cdot\frac{\mathfrak{r}}{F(t)},$$

ili

$$\frac{M}{s^3}\mathfrak{j}=\frac{M(t)\cdot[F(t)]^2}{\rho^3}\mathfrak{r}. \tag{3.12}$$

Ako funkcije $F(t)$ i $\varphi(t)$ podvrgnemo uslovima:

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}F'(t)+\frac{F''(t)}{\varphi'^2(t)}&=0,\\ -\frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}F(t)+2\frac{F'(t)}{\varphi'^2(t)}&=0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

tada će se relacija (3.10) za određivanje izvoda $\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\tau^2}$ svesti na ovu:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\tau^2}=\frac{F(t)}{\varphi'^2(t)}\frac{d^2\mathfrak{j}}{dt^2},$$

odakle je

$$\frac{d^2\mathfrak{j}}{dt^2}=\frac{\varphi'^2(t)}{F(t)}\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\tau^2}. \tag{3.14}$$

Zamenom vrednosti za $\frac{d^2\mathfrak{j}}{dt^2}$ iz (3.14) i vrednosti za $\frac{M}{s^3}\,\mathfrak{j}$ iz (3.12) u vektorsku diferencijalnu jednačinu (3.2) dobijamo:

$$\frac{\varphi'^2(t)}{F(t)}\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\tau^2}=-M(t)\cdot[F(t)]^2\cdot\frac{\mathfrak{r}}{\rho^3}. \tag{3.15}$$

Ako funkciju $M(t)$ podvrgnemo uslovu:

$$\frac{\varphi'^2(t)}{F(t)}=M(t)\cdot[F(t)]^2, \tag{3.16}$$

tada se jednačina (3 · 15) svodi na ovu:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\tau^2}+\frac{\mathfrak{r}}{\rho^3}=0,$$

a ovo je vektorska diferencijalna jednačina relativnog neporemećenog keplerovskog kretanja.

Jednačinama (3.13) i (3.16) može se dati sledeći oblik:

$$\begin{aligned}&-\varphi''(t)F'(t)+\varphi'(t)F''(t)=0,\\&-\varphi''(t)F(t)+2\varphi'(t)F'(t)=0,\\&-\varphi'^2(t)-M(t)[F(t)]^3=0.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Prema tome, ako funkcije $F(t)$, $\varphi(t)$ i $M(t)$ ispunjavaju uslovne jednačine (3.17), tada se vektorska diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2\mathfrak{j}}{dt^2}=-\frac{M(t)}{s^3}\mathfrak{j},$$

uzimajući $\mathfrak{r}$ za novu vektorsku funkciju, a τ za novu nezavisno promenljivu, transformiše u diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\tau^2}+\frac{\mathfrak{r}}{\rho^3}=0.$$

Na taj način se problem dvaju tela sa promenljivim zbirom masa svodi na problem dvaju tela sa stalnim masama.

Opšti oblik funkcija $F(t)$, $\varphi(t)$ i $M(t)$ moguće je odrediti iz jednačina (3 · 17) na sledeći način.

Ako se prva od ovih jednačina pomnoži sa $1/\varphi'^2(t)$, dobiće se:

$$\frac{\varphi'(t)F''(t)-\varphi''(t)F'(t)}{\varphi'^2(t)}=0,$$

ili

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{F'(t)}{\varphi'(t)}\right\}=0.$$

Integracijom dobijamo:

$$F'(t) = k\,\varphi'(t), \tag{3.18}$$

gde k označuje integracionu konstantu.

Ponovnom integracijom jednačine (3.18), dobija se relacija između funkcija $F(t)$ i $\varphi(t)$ u obliku:

$$F(t) = k\varphi(t) + k_1 \tag{3.19}$$

gde k_1 označuje novu integracionu konstantu.

Druga jednačina sistema (3.17), na osnovu (3.19) daje:

$$-\varphi''(t)\cdot[k\,\varphi(t) + k_1] + 2k\,\varphi'^2(t) = 0.$$

Ako stavimo

$$\varphi'(t) = y,$$

prethodna jednačina postaje

$$-y''(ky + k_1) + 2k\,y'^2 = 0, \tag{3.20}$$

gde je

$$y' = \frac{dy}{dt}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Smenom

$$y' = z, \qquad y'' = z\frac{dz}{dy}, \tag{3.21}$$

jednačina (3.20) se transformiše u ovu:

$$(ky + k_1)\frac{dz}{dy} - 2k\,z = 0. \tag{3.22}$$

Rešenje ove jednačine je

$$z = k_2(ky + k_1)^2 \tag{3.23}$$

gde k_2 pretstavlja integracionu konstantu.

Iz (3.21) i (3.23) proizilazi:

$$\frac{dy}{dt} = k_2(ky + k_1)^2, \tag{3.24}$$

čiji je integral

$$-\frac{1}{k(ky + k_1)} = k_2\,t + k_3, \tag{3.25}$$

gde k_3 označuje integracionu konstantu. Odavde je

$$y = -\frac{1}{k^2(k_2 t + k_3)} - \frac{k_1}{k},$$

ili pošto je $y=\varphi(t)$, to će $\varphi(t)$ biti oblika:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{k^2(k_2 t + k_3)} - \frac{k_1}{k}. \tag{3.26}$$

Ako se u relaciju (3.19) zameni vrednost za funkciju $\varphi(t)$ data sa (3.26), dobija se za funkciju $F(t)$:

$$F(t) = -\frac{1}{k(k_2 t + k_3)}. \tag{3.27}$$

Treća jednačina sistema (3.17) daje za funkciju $M(t)$:

$$M(t) = \frac{\varphi'^2(t)}{[F(t)]^3}. \tag{3.28}$$

Međutim iz (3.26) proizilazi:

$$\varphi'(t) = \frac{k_2}{k^2(k_2 t + k_3)^2},$$

te zamenom $\varphi'(t)$ iz ove relacije, kao i funkcije $F(t)$ iz (3.27) u (3.28), dobijamo za funkciju $M(t)$:

$$M(t) = -\frac{k^2_2}{k^2(k_2 t + k_3)}. \tag{3.29}$$

Integracione konstante k, k_2, k_3 možemo odrediti iz inicijalnih uslova. Ako za određivanje konstante k_1 pretpostavimo da

$$\varphi(t) \to 0, \quad t \to \infty,$$

tada je prema (3.26) konstanta

$$k_1 = 0.$$

Prema tome jednačine (3.17) daju za opšte oblike funkcija $F(t)$, $\varphi(t)$ i $M(t)$ sledeće relacije:

$$F(t) = -\frac{1}{k(k_2 t + k_3)}, \quad \varphi(t) = -\frac{1}{k^2(k_2 t + k_3)}, \quad M(t) = -\frac{k_2^2}{k(k_2 t + k_3)}. \tag{3.30}$$

Iz dobijenih rezultata mogu se izvesti ovi opšti zaključci:

1. Funkcije $F(t)$, $\varphi(t)$ i $M(t)$ definisane relacijama (3.30) pretstavljaju najopštiji oblik funkcija preko kojih se problem dvaju tela sa promenljivim zbirom masa može svesti na klasični problem dvaju tela Nebeske mehanike.

2. Batirev je u svojoj raspravi [9], u cilju preslikavanja putanja dveju tačaka sa promenljivim zbirom masa — na konične preseke, koristio transformacije oblika:

$$F^*(t) = \frac{1}{1+\alpha t}, \quad \varphi^*(t) = \frac{1}{\alpha(1+\alpha t)}, \quad M^*(t) = \frac{1}{1+\alpha t}, \quad (\alpha > 0) \tag{3.31}$$

Ako se uporede relacije (3.30) i (3.31), pa se za određivanje konstanata k, k_2, k_3 postave uslovi:

$$F(0)=F^*(0), \quad \varphi(0)=\varphi^*(0), \quad M(0)=M^*(0),$$

dobićemo

$$k\,k_3=-1, \quad k^2k_3=-\alpha, \quad k_2{}^2=-k\,k_3,$$

odakle je

$$k=\alpha, \quad k_2=\pm 1, \quad k_3=-\frac{1}{\alpha}\cdot$$

Odaberemo li od prednjih ovakav sistem partikularnih vrednosti integracionih konstanata

$$k=\alpha, \quad k_1=0, \quad k_2=-1, \quad k_3=-\frac{1}{\alpha}, \tag{3.32}$$

tada se relacije (3.31) dobijaju iz relacija (3.30) kao specijalni slučajevi.

Prema tome preslikavanje koje vrši Batirev na osnovu relacija (3.31) pretstavlja partikularni slučaj opštijih transformacija (3.30) kojima se problem sa promenljivim zbirom masa redukuje na problem sa stalnim masama.

3. Karakteristika je prednjih rezultata i ta da je ovakva redukcija moguća, ako funkcije $F(t)$, $\varphi(t)$ i $M(t)$ pripadaju jednostavnom tipu algebarskih racionalnih funkcija (homografske funkcije).

4. Bez obzira na uslove iz kojih se u relacijama (3.30) određuju integracione konstante k, k_2, k_3, uvek će se za svaki ovakav skup konstanata preslikavanjem doći do istog tipa koničnih preseka, pošto se vektorska diferencijalna jednačina (3.2) u svim slučajevima redukuje na oblik (3.6).

5. Prednji rezultati dopuštaju još jedan zaključak u vezi sa funkcijom $M=M(t)$ koja karakteriše promenu celokupne mase sistema. Iz relacije (3.28), na osnovu (3.26) i (3.27) proizilazi da je zbir masa $M(t)$ nezavisan od integracione konstante k_1. To znači, ako makako odaberemo uslove za određivanje konstante k, tj. fiksiramo ma koju od funkcija $\varphi(t)$, datih relacijom (3 · 26), zakon $M=M(t)$ varijacije mase sistema ostaće nepromenjen.

4. PRILOZI KVALITATIVNOJ ANALIZI PUTANJA U PROBLEMU DVAJU TELA SA PROMENLJIVIM ZBIROM MASA

Osnovni princip na kome je *Batirev* zasnovao kvalitativnu analizu putanja u problemu dvaju tela sa promenljivim zbirom masa izložen je u odeljku 2. ove rasprave [9].

U ovome odeljku ćemo dati neke priloge ovoj analizi koji ovu upotpunjuju s jedne strane, a s druge ukazuju na posledice koje u mehaničkom pogledu ima preslikavanje izvršeno bilo po postupku Batireva [9], ili po onome uopštenom koje je predložio autor [11].

U svome članku [12] autor je u tom smislu došao do sledećih rezultata. Vektorska diferencijalna jednačina kretanja za problem dvaju tela sa promenljivim zbirom masa ima oblik:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -\frac{M}{s^3}\mathfrak{r}, \quad (s = |\mathfrak{r}|) \tag{4.1}$$

Vektorskim množenjem ove jednačine vektorom $\mathfrak{r}$, dobija se

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} \times \mathfrak{r} = 0,$$

odakle neposredno proizilazi integral momenta kvantiteta kretanja

$$\mathfrak{r} \times \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{C} \tag{4.2}$$

gde $\mathfrak{C}$ označava vektorsku integracionu konstantu.

Ako se pođe od transformacija koje uvodi *Batirev* [9]

$$\mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{r}}{1 + \alpha t}, \quad \tau = \frac{1}{\alpha(1 + \alpha t)}, \quad M(t) = \frac{M_0}{1 + \alpha t}, \tag{4.3}$$
$$(\alpha > 0, \quad M_0 = \text{const.} = 1)$$

tada se smenom vektor funkcije $\mathfrak{r}$ sa $\mathfrak{x}$ i nezavisno promenljive t sa τ, vektorska jednačina (4.1) svodi na jednačinu

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{d\tau^2} + \frac{\mathfrak{x}}{\rho^3} = 0, \quad (\rho = |\mathfrak{x}|). \tag{4.4}$$

Ako poslednju jednačinu pomnožimo vektorski vektorom $\mathfrak{x}$, dobićemo

$$\mathfrak{x} \times \frac{d^2\mathfrak{x}}{d\tau^2} = 0,$$

čiji vektorski integral ima oblik

$$\mathfrak{x} \times \mathfrak{v} = \mathfrak{C}_1, \tag{4.5}$$

gde je $\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{x}}{d\tau}$ vektor brzine preslikane tačke, čije se relativno kretanje posmatra, a koja se kreće po koničnom preseku, a $\mathfrak{C}_1$ pretstavlja vektor nezavisan od τ.

Međutim iz prve od jednačina (4.3) sleduje:

$$\frac{d\mathfrak{x}}{d\tau} = \mathfrak{v} = \frac{d}{d\tau}\left\{\frac{\mathfrak{r}}{1 + \alpha t}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\mathfrak{r}}{1 + \alpha t}\right\} \cdot \frac{dt}{d\tau},$$

ili

$$\frac{d\mathfrak{x}}{d\tau} = \mathfrak{v} = \left\{\frac{1}{1 + \alpha t}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \frac{\alpha\mathfrak{r}}{(1 + \alpha t)^2}\right\}. \tag{4.6}$$

Kako je prema drugoj od jednačina (4.3)

$$\frac{dt}{d\tau} = -(1 + \alpha t)^2,$$

to jednačina (4.6) postaje:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}=\left\{\frac{\mathfrak{j}}{1+\alpha t}\cdot\frac{d\mathfrak{j}}{dt}-\frac{\alpha\mathfrak{j}}{(1+\alpha t)^2}\right\}\cdot\{-(1+\alpha t)^2\},$$

ili

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}=-(1+\alpha t)\frac{d\mathfrak{j}}{dt}+\alpha\mathfrak{j}. \tag{4.7}$$

Ako se zameni vektor $\mathfrak{r}$ iz prve od jednačina (4.3) i vektor $\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}$ iz (4.7) u jednačinu (4.5) dobićemo:

$$\frac{\mathfrak{j}}{1+\alpha t}\times\left\{-(1+\alpha t)\frac{d\mathfrak{j}}{dt}+\alpha\mathfrak{j}\right\}=\mathfrak{C}_1,$$

ili

$$-\left(\mathfrak{j}\times\frac{d\mathfrak{j}}{dt}\right)=\mathfrak{C}_1, \tag{4.8}$$

Upoređenjem relacije (4.8) sa (4.2) sleduje:

$$\mathfrak{C}_1=-\mathfrak{C}. \tag{4.9}$$

Iz jednačine (4.7) može se izvesti sledeći zaključak. Pošto $\mathfrak{j}$ prestavlja vektor relativnog položaja tačke A sa promenljivom masom m_1 u odnosu na tačku B s promenljivom masom m_2, to vektor

$$\frac{d\mathfrak{j}}{dt}=\mathfrak{w}$$

pretstavlja vektor brzine materijalne tačke m_1. S druge strane vektor

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}$$

pretstavlja vektor brzine tačke P na koničnom preseku, na koju se preslikava tačka A. Prema tome relacija (4.7) u obliku

$$\mathfrak{v}=-(1+\alpha t)\,\mathfrak{w}+\alpha\mathfrak{j},$$

ili

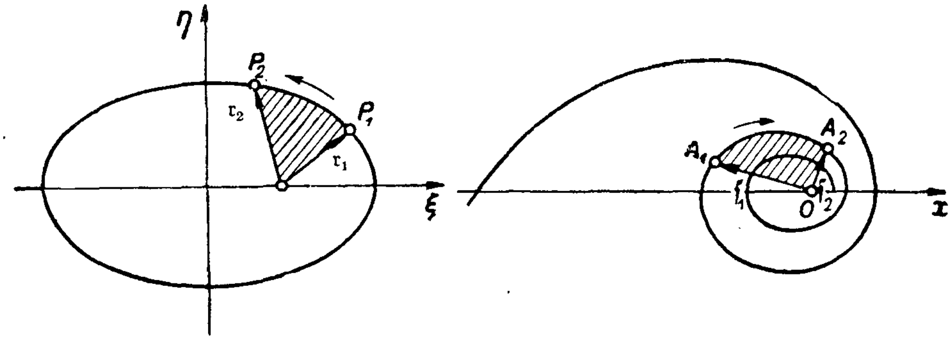
$$\mathfrak{w}=\frac{1}{1+\alpha t}(\alpha\mathfrak{j}-\mathfrak{v}) \tag{4.10}$$

daje vezu između vektora brzina ovih dveju tačaka. Njen praktičan značaj leži u mogućnosti, da se iz poznate strukture vektora $\mathfrak{v}$ koju daju konačne jednačine kretanja za problem dvaju tela, može odrediti vektor brzine $\mathfrak{w}$ materijalne tačke m_1.

Iz vektorske jednačine (4 · 9) proizilaze sledeći zaključci:

1. Sekorske brzine preslikane tačke P na koničnom preseku i tačke A sa promenljivom masom, imaju jednake skalarne veličine nezavisno od tipa putanje (eliptičnog, paraboličnog, hiperboličnog) ove poslednje tačke.

2. Orijentacije ravni putanja tačaka P i A su suprotne: smer obilaženja preslikane tačke P po koničnom preseku suprotan je smeru obilaženja tačke A promenljive mase po jednoj od odgovarajućih spiralnih putanja.



a b

Ilustracije radi uočimo primer tzv. eliptičnog tipa putanje tačke A (za velike vrednosti ekscentriciteta e). Prema rezultatima Batireva, eliptična putanja pomoćne tačke P sa slike (a) preslikava se na spiralnu putanju tačke A na slici (b). Ako u intervalu $[\tau_1, \tau_2]$ pomoćna tačka P opiše na eliptičnoj putanji luk $P_1 P_2$, tada će u odgovarajućem intervalu $[t_1, t_2]$ tačka A opisati luk $A_1 A_2$ spiralne putanje. Naš gornji rezultat utvrđuje, da će smerovi kretanja tačaka P i A biti suprotni i da su površine sektora prebrisane vektorima položaja tačke P odnosno A među sobom jednake.

U vezi sa rezultatima datim u odeljku 3 ove rasprave, autor je u okviru kvalitativne analize oblika putanja u problemu dvaju tela sa promenljivim zbirom masa posmatrao mogućnost egzistencije periodičnih odnosno asimptotičnih putanja u vezi sa strukturom funkcije $M(t)$ ([11]).

U tom cilju iskorišćena su od strane autora dva stava koja je u tretiranju problema sa promenljivim masama dokazao *G. N. Dubošin* [8].

Ti se stavovi mogu formulisati ovako:

1. Ako je u problemu dvaju tela sa promenljivim zbirom masa putanja periodična, ili asimptotska, tada masa sistema je karakterisana takvom funkcijom $M(t)$ koja ne može ni neograničeno rasti, niti neograničeno opadati [8].

2. Ako funkcija $M = M(t)$, koja karakteriše varijaciju mase sistema pretstavlja monotonu funkciju vremena i ako

$$M(t) \to L, \text{ sa } t \to \infty$$

pri čemu je $L \neq 0$, tada se iz skupa putanja koje leže u konačnom delu ravni mogu izdvojiti one putanje koje se neograničeno približavaju elipsi koja je potpuno određena izborom inicijalnih uslova kretanja.

Primenimo ove stavove na slučaj koji tretira Batirev. Masa sistema pretstavljena je tada funkcijom oblika:

$$M^*(t)=\frac{1}{1+\alpha t}, \quad (\alpha>0). \tag{4.11}$$

Za $-\frac{1}{\alpha}<t<\infty$, $M^*(t)$ pretstavlja monotonu funkciju promenljive t.

No pošto

$$M^*(t)\to 0 \text{ sa } t\to\infty$$

to je $L=0$, te funkcija $M^*(t)$ ne ispunjava uslove napred navedenih Dubošinovih stavova.

Isti je slučaj sa funkcijom $M(t)$ opštijeg oblika

$$M(t)=-\frac{k^2_2}{k(k_2 t+k_3)} \tag{4.12}$$

posmatrane u intervalu u kome je $M(t)>0$. No pošto je i u ovome slučaju

$$M(t)\to 0 \text{ sa } t\to\infty,$$

to ni funkcija (4.12) ne ispunjava uslove Dubošinovih stavova.

Iz utvrđenog karaktera funkcija $M^*(t)$ i $M(t)$ u vezi sa primenom Dubošinovih stavova na posmatrani problem, može se izvesti sledeći zaključak.

U problemu dvaju tela, u kome se masa sistema menja po zakonu (4.11) odnosno (4.12), putanje, koje pripadaju konačnoj oblasti ravni kretanja ne mogu imati ni periodični ni asimptotski karakter, niti se pri proizvoljnom izboru inicijalnih uslova može postići da se ove približe elipsi kao svom graničnom položaju.

Naposletku napomenimo da se kvalitativna analiza oblika putanja koju je dao *A. A. Batirev* u svojoj raspravi [9] u celini proširuje na slučaj, kada se masa sistema menja prema uopštenom zakonu (4.12).

5. REŠENJE PROBLEMA DVAJU TELA SA PROMENLJIVIM ZBIROM MASA

U ovom odeljku autor daje jedan novi način za dobijanje rešenja neporemećenog kretanja u problemu dvaju tela sa promenljivim zbirom masa. Pri tome on koristi: 1) metod preslikavanja koji je uveo *Batirev* i primenio ga u svojoj kvalitativnoj analizi oblika putanja u problemu dvaju tela sa promenljivim masama, svodeći ovaj na problem sa stalnim zbirom masa [9]; 2) sistem vektorskih elemenata upotrebljen u ([13], [14]) od Milankovića za pisanje diferencijalnih jednačina planetskih poremećaja umesto eliptičnih elemenata. Ovaj sistem vektorskih elemenata sačinjavaju: vektorska integraciona konstanta $\mathfrak{C}$ u integralu sektorske brzine, vektorska integraciona konstanta $\mathfrak{D}$ (tzv. perihelni vektor) u Hamiltonovom integralu problema dvaju tela i iz Keplerovog integrala-skalarna konstanta-T-vreme prolaza planete kroz perihel; dakle ukupno šest nezavisnih skalarnih konstanata, uzimajući u obzir da između vektorskih konstanata $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$ postoji relacija

$$\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}=0.$$

No dok se kod Milankovića upotreba ovako odabranog sistema vektorskih elemenata odnosi isključivo na tretiranje slučaja kretanja po eliptičnoj putanji, priroda problema o kome je reč u ovome odeljku zahteva, da se obuhvate i slučajevi kretanja po hiperboličnoj i paraboličnoj putanji. Stoga je autor uveo gore definisani skup vektorskih elemenata i za ova dva moguća oblika kretanja i dao odgovarajuće konačne jednačine kretanja.

Potrebno je istaći da ako se na ovaj način pristupi rešavanju problema dvaju tela sa promenljivim zbirom masa, tada je moguće ne samo postaviti u korespondenciju oblike putanja za ovaj problem i problem sa stalnim masama, već i postići, da elementi kretanja ma po kome od koničnih preseka u isti mah pretstavljaju elemente kretanja po spiralnim putanjama. Na taj način odabrani sistem vektorskih elemenata jednoznačno nam može definisati i kretanje po spiralnim linijama koje pretstavljaju putanje u posmatranom problemu, a koje su dobijene preslikavanjem koničnih preseka prema odgovarajućim zakonima koje je Batirev postavio u [9].

Vektorska diferencijalna jednačina relativnog kretanje materijalne tačke promenljive mase m_1 u odnosu na tačku promenljive mase m_2 glasi:

$$\frac{d^2\mathfrak{i}}{dt^2} = -\frac{f(m_1+m_2)}{s^3}\mathfrak{i}, \quad (s=|\mathfrak{i}|) \tag{5.1}$$

li

$$\frac{d^2\mathfrak{i}}{dt^2} = -\frac{fM}{s^3}\mathfrak{i}. \tag{5.2}$$

Ovde nam $\mathfrak{i}$ označava vektor relativnog položaja mase m_1 u odnosu a masu m_2, a $M=m_1+m_2$ celokupnu masu sistema koja pretstavlja funkciju remena. Za zakon po kome se menja ovaj zbir masa može se uzeti onaj oji je fiksirao *Batirev* u svome radu [9]:

$$M(t) = \frac{M_0}{1+\alpha t}, \qquad (M_0=1,\ \alpha>0) \tag{5.3}$$

li onaj koji je od ovog opštiji, a koji je dao autor u odeljku 3. [treća relacija 3.30)].

Uvodeći, mesto vektor funkcije $\mathfrak{i}$, novu vektor funkciju $\mathfrak{r}$ definisanu elacijom

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{i}}{1+\alpha t} \tag{5.4}$$

mesto vremena t, novu nezavisno promenljivu τ na osnovu relacije

$$\tau = \frac{1}{\alpha(1+\alpha t)} \tag{5.5}$$

uzimajući u obzir zakon promene mase (5.3) vektorska diferencijalna ednačina (2) se tranformiše u sledeću:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\tau^2} + \frac{\mathfrak{r}}{\rho^3} = 0, \quad (\rho=|\mathfrak{r}|) \tag{5.6}$$

a ova jednačina pretstavlja vektorsku diferencijalnu jednačinu relativnog kretanja za problem dvaju tela Nebeske mehanike. Treba primetiti da nam u ovom poslednjem problemu veličina τ pretstavlja „vreme", a veličina $\mu = f(m'+m'') = 1$.

Diferencijalna jednačina (5.6) koja pretstavlja vektorsku jednačinu neporemećenog relativnog kretanja za problem dvaju tela klasične Nebeske mehanike ima za nas od osnovnog značaja sledeća dva vektorska i jedan skalarni integral ([13], [14], [15]).

1. *Integral sektorske brzine*

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{v} = \mathfrak{C}_1 \tag{5.7}$$

pri čemu $\mathfrak{C}_1$ označava vektorsku integracionu konstantu — vektor upravan na ravni putanje posmatrane preslikane tačke P koja je ovde jedan od koničnih preseka.

2. *Hamiltonov integral:*[1]

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{C}_1 - \frac{\mathfrak{r}}{\rho} \tag{5.8}$$

pri čemu $\mathfrak{D}$ pretstavlja konstantni vektor koji leži u ravni putanje, dakle upravno na vektoru $\mathfrak{C}_1$, a naperen je prema perihelu (perihelni vektor).

3. *Keplerov integral*

$$n(t-T) = u - e \sin u \tag{5.9}$$

gde T označava vreme prolaza kroz perihel, a u ekscentričnu anomaliju.

Treba primetiti da u tretiranom slučaju $\mathfrak{v}$ pretstavlja vektor brzine preslikanog težišta promenljive mase m_1 na putanju tačke P koja je jedan od koničnih preseka. Ova s obzirom na to da je prema (5.6) $\mu = 1$ ima u ravni putanje

$$\mathfrak{C}_1 \mathfrak{r} = 0$$

sledeću jednačinu, koja se skalarnim množenjem sa $\mathfrak{r}$ izvodi iz Hamiltonovog integrala (5.8), u obliku:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{D} = C^2 - \rho, \quad (C = |\mathfrak{C}_1|)$$

odakle, uvodeći oznake $D = |\mathfrak{D}|$, $\sphericalangle(\mathfrak{D}, \mathfrak{r}) = v$, sleduje jednačina putanje:

$$\rho = \frac{C^2}{1 + D\cos v}\,. \tag{5.10}$$

Znači ovde parametar i ekscentricitet putanje imaju vrednosti:

$$p = C^2, \quad e = D. \tag{5.11}$$

S obzirom na to da nam vektorska jednačina (5.6) odnosno (5.10) može odrediti kretanje po eliptičnoj, hiperboličnoj odnosno paraboličnoj putanji, a da se stvarna kretanja u tretiranom problemu mogu dobiti pre-

[1]) Integral (5.8) se citira u literaturi i pod imenom *Laplace-ovog integrala.*

slikavanjem ova tri moguća tipa kretanja prema zakonima korespondencije (5.4) i (5.5), u daljem izlaganju, kratkoće radi, ove tipove kretanja zvaćemo *eliptičnim*, *hiperboličnim* odnosno *paraboličnim* i svaki od njih ćemo posebno analizirati.

1. *Eliptični tip kretanja*

U slučaju da se tačka P kreće po eliptičnoj putanji, biće $e = D < 1$. Sem toga, pošto je

$$\mu = n^2 a^3,$$

a

$$C^2 = p = a(1 - e^2) = a(1 - D^2); \quad a = \frac{C^2}{1 - D^2}$$

to, uzimajući u obzir još da je $\mu = 1$, srednje kretanje ima vrednost:

$$n = \frac{(1 - D^2)^{3/2}}{C^3}.$$

Zato Keplerov integral (5.9) dobija ovaj oblik:

$$\frac{(1 - D^2)^{3/2}}{C^3}(\tau - T) = u - D \sin u. \tag{5.12}$$

Koristeći relacije za vektor položaja $\mathfrak{r}$ i vektor brzine $\mathfrak{v}$ iz [13] (str. 19, jednačine (76) i (71)):

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} &= \frac{C^2}{\mu^2 - D^2} \frac{\mu \cos u - D}{D} \mathfrak{D} + \frac{C \sin u}{D\sqrt{\mu^2 - D^2}} (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}), \\ \mathfrak{v} &= -\mu \frac{\sqrt{\mu^2 - D^2}}{CD} \frac{\sin u}{\mu - D \cos u} \mathfrak{D} + \frac{\mu^2 - D^2}{C^2 D} \frac{\cos u}{\mu - D \cos u} (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) \end{aligned} \tag{5.13}$$

i imajući u vidu da je prema jednačini (5.5) $\mu = 1$,a $\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}$, iz (5.13) dobijamo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} &= \frac{C^2}{1 - D^2} \frac{\cos u - D}{D} \mathfrak{D} + \frac{C \sin u}{D\sqrt{1 - D^2}} (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}), \\ \mathfrak{v} &= -\frac{\sqrt{1 - D^2}}{CD} \frac{\sin u}{1 - D \cos u} \mathfrak{D} + \frac{1 - D^2}{C^2 D} \frac{\cos u}{1 - D \cos u} (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Jednačine (5.14) određuju nam vektore $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{v}$ kao funkcije ekscentrične anomalije u, odnosno preko Keplerove jednačine (5.12) i kao funkcije pseudovremena τ, te pretstavljaju konačne jednačine kretanja problema sa stalnim zbirom masa.

Polazeći sada od ovoga na izloženi način u [13] rešenog problema neporemećenog relativnog kretanja po eliptičnoj putanji u problemu dvaju tela Nebeske mehanike, postavlja se pitanje, kako se neposredno mož dobiti rešenje problema neporemećenog kretanja za problem sa promenljivir masama.

Vektor relativnog položaja $\mathfrak{f}$ jedne promenljive mase u odnosu n drugu može se dobiti iz relacije (5.4), odakle je

$$\mathfrak{f} = (1+\alpha t)\mathfrak{r}.$$

Odavde koristeći prvu od jednačina (5.14) dobijamo:

$$\mathfrak{f} = (1+\alpha t)\left\{\frac{C^2}{1-D^2}\,\frac{\cos u - D}{D}\,\mathfrak{D} + \frac{C\sin u}{D\sqrt{1-D^2}}\,(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\} \qquad (5.15$$

pri čemu u dobijamo zamenom τ iz (5.5) u (5.12) i rešenjem tako dob jene jednačine

$$\frac{(1-D^2)^{3/2}}{C^3}\left[\frac{1}{\alpha(1+\alpha t)} - T\right] = u - D\sin u \qquad (5.16$$

po u. Na taj način se dobija veličina u kao funkcija vremena, a prema (5.1 onda je i vektor položaja $\mathfrak{f}$ izražen kao funkcija od t.

Vektor brzine $\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{f}}{dt}$ može se dobiti na ovaj način. Kao što je aut pokazao u odeljku 4 [jednačina (4.10)] između vektora $\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau} = \mathfrak{v}$, $\frac{d\mathfrak{f}}{dt} =$ i $\mathfrak{f}$ postoji relacija

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau} = -\,(1+\alpha t)\frac{d\mathfrak{f}}{dt} + \alpha\,\mathfrak{f},$$

odakle je

$$\frac{d\mathfrak{f}}{dt} = \mathfrak{w} = \frac{1}{1+\alpha t}\left(\alpha\,\mathfrak{f} - \frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}\right). \qquad (5.1$$

Koristeći se drugom od jednačina (5.14) i zamenjujući u (5.17) $\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau} =$ odgovarajućom vrednošću iz te jednačine dobijamo za vektor brzine

$$\mathfrak{w} = \frac{1}{1+\alpha t}\left\{\alpha(1+\alpha t)\left[\frac{C^2}{1-D^2}\,\frac{\cos u - D}{D}\,\mathfrak{D} + \frac{C\sin u}{D\sqrt{1-D^2}}\,(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right]\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{1-D^2}}{CD}\,\frac{\sin u}{1-D\cos u}\cdot\mathfrak{D} - \frac{1-D^2}{C^2 D}\,\frac{\cos u}{1-D\cos u}\,(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\},$$

ili

$$\mathfrak{w} = \frac{1}{D(1+\alpha t)}\left\{\left[\alpha(1+\alpha t)\frac{C^2}{1-D^2}(\cos u - D) + \frac{\sqrt{1-D^2}}{C}\,\frac{\sin u}{1-D\cos u}\right]\mathfrak{D}\right.$$

$$\left. + \left[\alpha(1+\alpha t)\frac{C\sin u}{\sqrt{1-D^2}} - \frac{1-D^2}{C^2}\,\frac{\cos u}{1-D\cos u}\right](\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}.$$

Ovde je veličina u izražena kao funkcija od t na osnovu jednačine (5.16).

Vektor brzine $\mathfrak{w}$ može se odrediti još i na ovaj način. Iz jednačine (5.16), diferenciranjem leve i desne strane po t, proizilazi:

$$\frac{(1-D^2)^{3/2}}{C^3}\left[-\frac{1}{(1+\alpha t)^2}\right]=(1-D\cos u)\frac{du}{dt},$$

odakle je

$$\frac{du}{dt}=-\frac{1}{(1+\alpha t)^2}\cdot\frac{(1-D^2)^{3/2}}{C^3}\cdot\frac{1}{1-D\cos u}. \tag{5.19}$$

Diferenciranjem jednačine (5.15) po vremenu dobijamo:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=\mathfrak{w}=\alpha\left\{\frac{C^2}{1-D^2}\,\frac{\cos u-D}{D}\,\mathfrak{D}+\frac{C\sin u}{D\sqrt{1-D^2}}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{D})\right\}$$

$$+(1+\alpha t)\left\{-\frac{C^2}{1-D^2}\,\frac{\sin u}{D}\,\mathfrak{D}+\frac{C\cos u}{D\sqrt{1-D^2}}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{D})\right\}\frac{du}{dt}.$$

Zamenjujući ovde $\frac{du}{dt}$ njegovom vrednošću iz (5.19) dobijamo:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=\mathfrak{w}=\alpha\left\{\frac{C^2}{1-D^2}\,\frac{\cos u-D}{D}\,\mathfrak{D}+\frac{C\sin u}{D\sqrt{1-D^2}}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{D})\right\}$$

$$-\frac{1}{1+\alpha t}\,\frac{(1-D^2)^{3/2}}{C^3}\,\frac{1}{1-D\cos u}\left\{-\frac{C^2}{1-D^2}\,\frac{\sin u}{D}\,\mathfrak{D}+\frac{C\cos u}{D\sqrt{1-D^2}}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{D})\right\},$$

odakle je

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=\mathfrak{w}=\alpha\left\{\frac{C^2}{1-D^2}\,\frac{\cos u-D}{D}\,\mathfrak{D}+\frac{C\sin u}{D\sqrt{1-D^2}}(\mathfrak{E}+\mathfrak{D})\right\}$$

$$+\frac{1}{1+\alpha t}\,\frac{\sqrt{1-D^2}}{CD}\,\frac{\sin u}{1-D\cos u}\,\mathfrak{D}-\frac{1}{1+\alpha t}\,\frac{1-D^2}{C^2D}\,\frac{\cos u}{1-D\cos u}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{D}),$$

a odatle definitivno dobijamo za vektor brzine $\mathfrak{w}$ vrednost već određenu jednačinom (5.18).

Na taj način polazeći od jednačina (5.14) i (5.12) koje pretstavljaju rešenja vektorske diferencijalne jednačine (5.6) za problem dvaju tela sa stalnim masama, došli smo do jednačina (5.15), (5.18) i (5.16) koje pretstavljaju rešenje vektorske diferencijalne jednačine (5.2) tj. problema dvaju tela sa promenljivim masama za slučaj kada se putanja u ovom problemu transformacijama (5.4) i (5.5) preslikava na eliptičnu putanju.

2. Hiperbolični tip kretanja

U slučaju ako se transformacijama (5.4) i (5.5) putanja u našem problemu preslikava na hiperboličnu putanju, imaćemo posla sa hiperboličnim tipom kretanja.

Jednačina (5.10) u slučaju hiperbolične putanje, daje

$$p = C^2, \quad e = D, \quad (D > 1). \tag{5.19}$$

Kako je kod hiperbole

$$p = \frac{b^2}{a} = a(e^2 - 1), \qquad b = a\sqrt{e^2 - 1},$$

gde nam a, b, e, p označuju poznate parametre kod hiperbole, relacije (5.19) i poslednje dve daju

$$a = \frac{C^2}{D^2 - 1}, \qquad b = \frac{C^2}{\sqrt{D^2 - 1}}. \tag{5.20}$$

Jednačina hiperbolične putanje može se napisati u jednom od ova dva oblika

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\cos v},$$

gde v označava pravu anomaliju, ili

$$r = a(-1 + e \operatorname{ch} F),$$

gde F označava hiperboličnu amplitudu.

Prema (5.19) i (5.20) ove jednačine postaju

$$\begin{aligned} r &= \frac{C^2}{1 + D\cos v}, \\ r &= \frac{C^2}{D^2 - 1}(-1 + D \operatorname{ch} F). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Iz ovih jednačina proizilazi:

$$D^2 - 1 = (1 + D\cos v) \cdot (-1 + D \operatorname{ch} F),$$

odakle je

$$\cos v = \frac{D - \operatorname{ch} F}{-1 + D \operatorname{ch} F}. \tag{5.22}$$

Ova relacija pretstavlja vezu između prave anomalije v i hiperbolične amplitude F. Umesto relacije (5.22) može se upotrebiti relacija

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{D+1}{D-1}} \cdot \operatorname{tgh} F \tag{5.23}$$

Ako se početak koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ nalazi u žiži hiperbole, tada se vektor položaja $\mathbf{r}$ tačke na putanji u ravni $O\xi\eta$ može pretstaviti u obliku:

$$\mathfrak{r} = \xi \cdot \frac{\mathfrak{D}}{D} + \eta \cdot \frac{\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}}{CD}, \tag{5.24}$$

pri čemu je

$$\xi = r \cos v, \qquad \eta = r \sin v. \tag{5.25}$$

Koristeći se jednačinom (5.22) dobijamo

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \left(\frac{D - \operatorname{ch} F}{-1 + D \operatorname{ch} F}\right)^2,$$

odakle je

$$\sin v = \frac{\sqrt{D^2 - 1} \cdot \operatorname{sh} F}{-1 + D \operatorname{ch} F}. \tag{5.26}$$

Na osnovu druge od jednačina (5.21), kao i jednačina (5.22) i (5.26) iz (5.25) dobijamo:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{C^2}{D^2 - 1} \cdot (D - \operatorname{ch} F), \\ \eta &= \frac{C^2}{\sqrt{D^2 - 1}} \operatorname{sh} F. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Stoga jednačina (5.24) postaje

$$\mathfrak{r} = \frac{C^2}{D^2 - 1} \cdot \frac{D - \operatorname{ch} F}{D} \mathfrak{D} + \frac{C \operatorname{sh} F}{D \sqrt{D^2 - 1}} (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}). \tag{5.28}$$

Očigledno je da je za slučaj hiperbolične putanje

$$n = \frac{(D^2 - 1)^{3/2}}{C^3}.$$

Zato, jednačina (v. napr. [17])

$$n(\tau - T) = -F + e \operatorname{sh} F,$$

koja služi za određivanje F kao funkcije od τ dobija ovaj oblik:

$$\frac{(D^2 - 1)^{3/2}}{C^3} (\tau - T) = -F + D \operatorname{sh} F. \tag{5.29}$$

Vektor brzine $\mathfrak{v} = \dfrac{d\mathfrak{r}}{d\tau}$ kretanja tačke P po hiperboličnoj putanji dobijamo iz jednačine (5.28) diferenciranjem po τ:

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{d\tau} = \left\{ \frac{-C^2}{D^2 - 1} \frac{\operatorname{sh} F}{D} \mathfrak{D} + \frac{C \operatorname{ch} F}{D \sqrt{D^2 - 1}} (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) \right\} \cdot \frac{dF}{d\tau}. \tag{5.30}$$

Diferenciranjem leve i desne strane jednačine (5.29) po τ dobijamo

$$\frac{(D^2-1)^{3/2}}{C^3}=(-1+D\operatorname{ch}F)\cdot\frac{dF}{d\tau},$$

odakle je

$$\frac{dF}{d\tau}=\frac{(D^2-1)^{3/2}}{C^3}\frac{1}{-1+D\operatorname{ch}F}. \tag{5.31}$$

Zamenom ove vrednosti za $\frac{dF}{d\tau}$ u jednačinu (5.30) dobijamo:

$$\mathfrak{v}=\frac{(D^2-1)^{3/2}}{C^3}\frac{1}{-1+D\operatorname{ch}F}\left\{-\frac{C^2}{D^2-1}\frac{\operatorname{sh}F}{D}\mathfrak{D}+\frac{C\operatorname{ch}F}{D\sqrt{D^2-1}}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\},$$

ili

$$\mathfrak{v}=-\frac{\sqrt{D^2-1}}{CD}\frac{\operatorname{sh}F}{-1+D\operatorname{ch}F}\mathfrak{D}+\frac{D^2-1}{C^2D}\frac{\operatorname{ch}F}{-1+D\operatorname{ch}F}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}). \tag{5.32}$$

Na ovaj način nađene jednačine (5.28), (5.32) i (5.29) pretstavljaju nam rešenje problema relativnog neporemećenog kretanja dvaju tela Nebeske mehanike za slučaj kretanja po hiperboličnoj putanji.

Da bismo odredili vektor položaja $\mathfrak{f}$ i vektor brzine $\mathfrak{w}=\frac{d\mathfrak{f}}{dt}$ u problemu dvaju tela sa promenljivom zbirom masa, možemo postupiti na ovaj način. Pošto je prema (5.4)

$$\mathfrak{f}=(1+\alpha t)\mathfrak{r},$$

to na osnovu jednačine (5.28) dobijamo za vektor položaja $\mathfrak{f}$ jedne promenljive mase u odnosu na drugu

$$\mathfrak{f}=(1+\alpha t)\cdot\left\{\frac{C^2}{D^2-1}\frac{D-\operatorname{ch}F}{D}\mathfrak{D}+\frac{C\operatorname{sh}F}{D\sqrt{D^2-1}}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}. \tag{5.33}$$

Vektor brzine $\mathfrak{w}=\frac{d\mathfrak{f}}{dt}$ možemo dobiti iz relacije

$$\mathfrak{w}=\frac{1}{1+\alpha t}\left(\alpha\mathfrak{f}-\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}\right),$$

zamenjujući ovde, $\mathfrak{f}$ iz (5.33), a $v=\frac{dr}{d\tau}$ iz (5.32). Na taj način ćemo dobiti:

$$\mathfrak{w}=\frac{1}{1+\alpha t}\left\{\alpha(1+\alpha t)\left[\frac{C^2}{D^2-1}\frac{D-\operatorname{ch}F}{D}\mathfrak{D}+\frac{C\operatorname{sh}F}{D\sqrt{D^2-1}}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right]-\right.$$
$$\left.-\left[-\frac{\sqrt{D^2-1}}{CD}\frac{\operatorname{sh}F}{-1+D\operatorname{ch}F}\mathfrak{D}+\frac{D^2-1}{C^2D}\frac{\operatorname{ch}F}{-1+D\operatorname{ch}F}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right]\right\},$$

ili u definitivnom obliku:

$$\mathfrak{w} = \frac{1}{D(1+\alpha t)}\left\{\left[\alpha(1+\alpha t)\cdot\frac{C^2}{D^2-1}(D-\operatorname{ch}F)+\frac{\sqrt{D^2-1}}{C}\,\frac{\operatorname{sh}F}{-1+D\operatorname{ch}F}\right]\cdot\mathfrak{D}\right.$$

$$\left.+\left[\alpha(1+\alpha t)\cdot\frac{C\operatorname{sh}F}{\sqrt{D^2-1}}-\frac{D^2-1}{C^2}\,\frac{\operatorname{ch}F}{-1+D\operatorname{ch}F}\right]\cdot(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}).\right\} \qquad (5.34)$$

Jednačine (5.33), (5.34) i

$$\frac{(D^2-1)^{3/2}}{C^3}\left[\frac{1}{\alpha(1+\alpha t)}-T\right]=-F+D\operatorname{sh}F \qquad (5.35)$$

pretstavljaju rešenje problema dvaju tela sa promenljivim zbirom masa za slučaj hiperboličnog kretanja tačke P na koju se preslikava tačka A promenljive mase m_1.

Vektor brzine $\mathfrak{w}$ za hiperbolični tip kretanja može se odrediti još i na ovaj način. Iz jednačine (5.35), diferenciranjem leve i desne strane po vremenu dobijamo:

$$-\frac{(D^2-1)^{3/2}}{C^3}\cdot\frac{1}{(1+\alpha t)^2}=(-1+D\operatorname{ch}F)\cdot\frac{dF}{dt},$$

odakle je

$$\frac{dF}{dt}=-\frac{(D^2-1)^{3/2}}{C^3}\cdot\frac{1}{(1+\alpha t)^2}\,\frac{1}{-1+D\operatorname{ch}F}. \qquad (5.36)$$

Diferenciranjem jednačine (5.35) po t, dobija se vektor brzine:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=\mathfrak{w}=\alpha\left\{\frac{C^2}{D^2-1}\,\frac{D-\operatorname{ch}F}{D}\mathfrak{D}+\frac{C\operatorname{sh}F}{D\sqrt{D^2-1}}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}$$

$$+(1+\alpha t)\left\{-\frac{C^2}{D^2-1}\,\frac{\operatorname{sh}F}{D}\mathfrak{D}-\frac{C\operatorname{ch}F}{D\sqrt{D^2-1}}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}\frac{dF}{dt}. \qquad (5.37)$$

Posle zamene $\frac{dF}{dt}$ iz (5.36) u (5.37) dobijamo za vektor brzine $\mathfrak{w}$:

$$\mathfrak{w}=\alpha\left\{\frac{C^2}{D^2-1}\,\frac{D-\operatorname{ch}F}{D}\mathfrak{D}+\frac{C\operatorname{sh}F}{D\sqrt{D^2-1}}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}$$

$$-\frac{1}{1+\alpha t}\cdot\frac{(D^2-1)^{3/2}}{C^3}\,\frac{1}{-1+D\operatorname{ch}F}\cdot\left\{-\frac{C^2}{D^2-1}\,\frac{\operatorname{sh}F}{D}\mathfrak{D}+\frac{C\operatorname{ch}F}{D\sqrt{D^2-1}}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\},$$

a odavde dobijamo definitivno već nadjenu vrednost za vektor $\mathfrak{w}$ datu jednačinom (5.34).

Jednačine (5.33), (5.34), (5.35) pretstavljaju rešenja za hiperbolični tip kretanja problema dvaju tela sa promenljivim zbirom masa.

3. *Parabolični tip kretanja*

Ako se transformacijama (5.4) i (5.5) putanja u problemu dvaju tela sa promenljivim masama preslikava na parabolu, imamo slučaj paraboličnog tipa kretanja.

Jednačina parabole prema (5.10) dobija oblik

$$\rho = \frac{C^2}{1 + \cos v} \tag{5.38}$$

tj. u ovom slučaju je

$$D = 1 \tag{5.39}$$

što znači da perihelni vektor $\mathfrak{D}$ u slučaju kretanja po paraboli pretstavlja jedinični vektor. Iz jednačine (5.38) proizilazi da je parametar parabole

$$p = C^2. \tag{5.40}$$

Jednačinu parabolične putanje (5.38) možemo napisati i u obliku

$$\rho = \frac{C^2}{2} \sec^2 \frac{v}{2}, \tag{5.41}$$

ili koristeći u Nebeskoj mehanici usvojenu oznaku

$$p = 2q$$

tj. prema (5.40)

$$q = \frac{C^2}{2}, \tag{5.42}$$

jednačini (5.41) možemo dati ovaj oblik

$$\rho = q \sec^2 \frac{v}{2}. \tag{5.43}$$

Koordinate ξ i η vektora položaja $\mathfrak{r}$ u ravni ove parabole, a u odnosu na sistem sa početkom u žiži i ξ-osom usmerenom jediničnim vektorom $\mathfrak{D}$, date su relacijama

$$\xi = \rho \cos v, \quad \eta = \rho \sin v, \tag{5.44}$$

ili prema (5.41):

$$\xi = \frac{C^2}{2} \sec^2 \frac{v}{2} \cos v,$$

$$\eta = \frac{C^2}{2} \sec^2 \frac{v}{2} \sin v,$$

ili

$$\xi = \frac{C^2}{2} \sec^2 \frac{v}{2} \left(\cos^2 \frac{v}{2} - \sin^2 \frac{v}{2} \right),$$

$$\eta = \frac{C^2}{2} \sec^2 \frac{v}{2} \cdot 2 \sin \frac{v}{2} \cos \frac{v}{2},$$

tj. definitivno

$$\xi = \frac{C^2}{2}\left(1 - \mathrm{tg}^2 \frac{v}{2}\right),$$
$$\eta = C^2 \,\mathrm{tg} \frac{v}{2}. \tag{5.45}$$

Vektor položaja $\mathfrak{r}$ dat relacijom:

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{D}}{D} \xi + \frac{\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}}{CD} \eta$$

na osnovu (5.39) ima vrednost

$$\mathfrak{r} = \xi \cdot D + \frac{\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}}{C} \eta,$$

ili prema (5.45)

$$\mathfrak{r} = \frac{C^2}{2}\left(1 - \mathrm{tg}^2 \frac{v}{2}\right) \cdot \mathfrak{D} + C \cdot \mathrm{tg} \frac{v}{2} (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) \tag{5.46}$$

Jednačina (5.46) određuje vektor položaja $\mathfrak{r}$ kao funkciju prave anomalije v.

Međutim u problemu dvaju tela Nebeske mehanike postoji sledeća jednačina za određivanje prave anomalije v kao funkcije vremena (videti npr. [17])

$$\frac{\tau - T}{\sqrt{2}\, q^{3/2}} = \mathrm{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \mathrm{tg}^3 \frac{v}{2}, \tag{5.47}$$

pri čemu je q dato obrascem (5.42). Na osnovu ove vrednosti za q biće:

$$\sqrt{2}\, q^{3/2} = \sqrt{2} \cdot \frac{C^3}{2^{3/2}} = \frac{C^3}{2},$$

pa jednačina (5 47) dobija oblik:

$$\frac{2}{C^3}(\tau - T) = \mathrm{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \mathrm{tg}^3 \frac{v}{2}. \tag{5.48}$$

Diferenciranjem leve i desne strane jednačine (5.46) po τ, dobijamo:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau} = \mathfrak{v} = \left\{ - \frac{C^2 \,\mathrm{tg}^2 \frac{v}{2}}{2 \cos^2 \frac{v}{2}} \cdot \mathfrak{D} + \frac{C}{2 \cos^2 \frac{v}{2}} (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) \right\} \cdot \frac{dv}{d\tau},$$

ili

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}=\frac{1}{2\cos^2\frac{\mathrm{v}}{2}}\left\{-C^2\operatorname{tg}\frac{\mathrm{v}}{2}\cdot\mathfrak{D}+C\cdot(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}\cdot\frac{d\mathrm{v}}{d\tau}. \tag{5.49}$$

Međutim diferenciranjem leve i desne strane jednačine (5.48) po τ, dobijamo

$$\frac{2}{C^3}=\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{\mathrm{v}}{2}}+\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\mathrm{v}}{2}}{2\cos^2\frac{\mathrm{v}}{2}}\right)\cdot\frac{d\mathrm{v}}{d\tau}.$$

ili

$$\frac{2}{C^3}=\frac{1}{2\cos^2\frac{\mathrm{v}}{2}}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\mathrm{v}}{2}\right)\frac{d\mathrm{v}}{d\tau},$$

li

$$\frac{2}{C^3}=\frac{1}{2\cos^4\frac{\mathrm{v}}{2}}\cdot\frac{d\mathrm{v}}{d\tau},$$

ɔdakle je

$$\frac{d\mathrm{v}}{d\tau}=\frac{4\cos^4\frac{\mathrm{v}}{2}}{C^3}. \tag{5.50}$$

Zamenom izvoda $\frac{d\mathrm{v}}{d\tau}$ iz (5.50) u (5.49), dobijamo za vektor brzine tačke P na paraboli

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}=\frac{1}{2\cos^2\frac{\mathrm{v}}{2}}\left\{-C^2\operatorname{tg}\frac{\mathrm{v}}{2}\cdot\mathfrak{D}+C\cdot(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}\cdot\frac{4\cos^4\frac{\mathrm{v}}{2}}{C^3},$$

ili

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}=\frac{2\cos^2\frac{\mathrm{v}}{2}}{C^3}\left\{-C^2\operatorname{tg}\frac{\mathrm{v}}{2}\cdot\mathfrak{D}+C\cdot(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\},$$

ili definitivno:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}=-\frac{\sin\mathrm{v}}{C}\cdot\mathfrak{D}+\frac{2\cos^2\frac{\mathrm{v}}{2}}{C^2}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}). \tag{5.51}$$

Jednačine (5.46), (5.51) i (5.48) pretstavljaju rešenje vektorske diferencijalne jednačine (5.6) relativnog neporemećenog kretanja tačke P za slučaj njenog kretanja po paraboličnoj putanji.

Vektor $\mathfrak{j}$ relativnog položaja mase m_1 u odnosu na masu m_2, možemo dobiti, ako u relaciju (5.4) zamenimo vektor $\mathfrak{r}$ iz jednačine (5.46). Tada će biti:

$$\mathfrak{j} = (1+\alpha t)\left\{\frac{C^2}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{v}{2}\right)\mathfrak{D}+C\cdot\mathrm{tg}\frac{v}{2}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}. \tag{5.52}$$

Da bismo odredili vektor brzine $\mathfrak{w}=\frac{d\mathfrak{j}}{dt}$ u problemu sa promenljivim zbirom masa možemo i u ovom slučaju postupiti na dva načina.

Pre svega diferenciranjem leve i desne strane jednačine (5.52) po vremenu dobijamo

$$\frac{d\mathfrak{j}}{dt}=\mathfrak{w}=\alpha\left\{\frac{C^2}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{v}{2}\right)\cdot\mathfrak{D}+C\,\mathrm{tg}\frac{v}{2}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}+$$

$$+(1+\alpha t)\cdot\left\{-C^2\frac{\mathrm{tg}\frac{v}{2}}{2\cos^2\frac{v}{2}}\mathfrak{D}+\frac{C}{2}\frac{(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})}{\cos^2\frac{v}{2}}\right\}\cdot\frac{dv}{dt}. \tag{5.53}$$

Uzimajući u obzir relaciju (5.5), jednačina (5.48) postaje:

$$\frac{2}{C^3}\left\{\frac{1}{\alpha(1+\alpha t)}-T\right\}=\mathrm{tg}\frac{v}{2}+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\frac{v}{2}. \tag{5.54}$$

Diferenciranjem leve i desne strane poslednje jednačine po t dobijamo:

$$-\frac{2}{C^3}\frac{1}{(1+\alpha t)^2}=\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{v}{2}}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{tg}^2\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{v}{2}}\right\}\cdot\frac{dv}{dt},$$

ili

$$-\frac{2}{C^3}\frac{1}{(1+\alpha t)^2}=\frac{1}{2}\left(\sec^2\frac{v}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{v}{2}\sec^2\frac{v}{2}\right)\frac{dv}{dt}. \tag{5.55}$$

Pošto je

$$\sec^2\frac{v}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{v}{2}\sec^2\frac{v}{2}=\sec^4\frac{v}{2},$$

to jednačina (5.55) dobija sledeći oblik:

$$-\frac{2}{C^3}\frac{1}{(1+\alpha t)^2}=\frac{1}{2}\sec^4\frac{v}{2}\cdot\frac{dv}{dt},$$

odakle je

$$\frac{d\nu}{dt} = -\frac{4}{C^3}\frac{\cos^4\frac{\nu}{2}}{(1+\alpha t)^2}. \tag{5.56}$$

Zamenom vrednosti za $\frac{d\nu}{dt}$ iz (5.56) u (5.53) dobijamo:

$$\frac{d\mathfrak{j}}{dt} = \mathfrak{w} = \alpha\left\{\frac{C^2}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}\right)\cdot\mathfrak{D} + C\cdot\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}$$

$$-\frac{4}{C^3}\frac{\cos^4\frac{\nu}{2}}{1+\alpha t}\left\{-\frac{C^2}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{\cos^2\frac{\nu}{2}} + \frac{1}{2}\frac{C}{\cos^2\frac{\nu}{2}}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\},$$

ili

$$\frac{d\mathfrak{j}}{dt} = \mathfrak{w} = \alpha\left\{\frac{C^2}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}\right)\cdot\mathfrak{D} + C\cdot\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}$$

$$-\frac{4}{C^3}\frac{1}{1+\alpha t}\left\{-\frac{C^2}{2}\sin\frac{\nu}{2}\cos\frac{\nu}{2}\cdot\mathfrak{D} + \frac{1}{2}C\cdot\cos^2\frac{\nu}{2}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\},$$

ili

$$\frac{d\mathfrak{j}}{dt} = \mathfrak{w} = \alpha\left\{\frac{C^2}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}\right)\cdot\mathfrak{D} + C\cdot\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}$$

$$+\frac{1}{C^3}\frac{1}{1+\alpha t}\left\{C^2\sin\nu\cdot\mathfrak{D} - 2C\cos^2\frac{\nu}{2}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\},$$

ili definitivno:

$$\frac{d\mathfrak{j}}{dt} = \mathfrak{w} = \frac{1}{1+\alpha t}\left\{\left[\alpha(1+\alpha t)\cdot\frac{C^2}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\sin\nu}{C}\right]\cdot\mathfrak{D}\right.$$

$$\left.+\left[\alpha(1+\alpha t)\cdot C\cdot\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} - \frac{2}{C^2}\cos^2\frac{\nu}{2}\right]\cdot(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}. \tag{5.57}$$

Vektor brzine $\mathfrak{w}$ može se odrediti, polazeći od relacije (5.17), na ovaj način. Diferenciranjem leve i desne strane jednačine (5.46) po τ nalazimo:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau} = \mathfrak{v} = \left\{-C^2\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}}{2\cos^2\frac{\nu}{2}}\cdot\mathfrak{D} + \frac{C}{2\cos^2\frac{\nu}{2}}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}\cdot\frac{d\nu}{d\tau},$$

ili

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}=\frac{1}{2\cos^2\frac{v}{2}}\left\{-C^2\operatorname{tg}\frac{v}{2}\cdot\mathfrak{D}+C\cdot(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}\cdot\frac{dv}{d\tau}\cdot \tag{5.58}$$

Međutim diferenciranjem leve i desne strane jednačine (5.48) po τ, dobijamo

$$\frac{2}{C^3}=\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{v}{2}}+\frac{\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}}{2\cos^2\frac{v}{2}}\right)\cdot\frac{dv}{d\tau},$$

ili

$$\frac{2}{C^3}=\frac{1}{2\cos^2\frac{v}{2}}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}\right)\frac{dv}{d\tau}$$

ili

$$\frac{2}{C^3}=\frac{1}{2\cos^4\frac{v}{2}}\cdot\frac{dv}{d\tau},$$

odakle je

$$\frac{dv}{d\tau}=\frac{4\cos^4\frac{v}{2}}{C^3}. \tag{5.59}$$

Zamenom vrednosti za $\frac{dv}{d\tau}$ iz (5.59) u jednačinu (5.58) dobijamo

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}=\frac{1}{2\cos^2\frac{v}{2}}\left\{-C^2\operatorname{tg}\frac{v}{2}\cdot\mathfrak{D}+C\cdot(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}\cdot\frac{4\cos^4\frac{v}{2}}{C^3},$$

ili

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}=\frac{4\cos^2\frac{v}{2}}{C^3}\left\{-C^2\operatorname{tg}\frac{v}{2}\cdot\mathfrak{D}+C\cdot(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\},$$

ili definitivno:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}=-\frac{\sin v}{C}\mathfrak{D}+\frac{2\cos^2\frac{v}{2}}{C^2}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}). \tag{5.60}$$

Zamenom vektora položaja $\mathfrak{r}$ iz (5.52) i vektora $\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}=\mathfrak{v}$ iz (5.60) u jednačinu (5.17), dobijamo:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{w} = \frac{1}{1+\alpha t}\left\{\alpha(1+\alpha t)\left[\frac{C^2}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\mathrm{v}}{2}\right)\cdot\mathfrak{D} + C\,\mathrm{tg}^2\frac{\mathrm{v}}{2}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right]\right.$$

$$\left. + \frac{\sin \mathrm{v}}{C}\mathfrak{D} - \frac{2\cos^2\frac{\mathrm{v}}{2}}{C^2}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D})\right\}.$$

Ova jednačina je identična sa već nađenom jednačinom (5.57).

Prema tome za parabolični tip kretanja relacije (5.52), (5.57) i (5.54) pretstavljaju konačne jednačine kretanja tj. rešenja vektorske diferencijalne jednačine (5.2) za problem dvaju tela sa promenljivim zbirom masa.

6. O PUTANJAMA U JEDNOM SPECIJALNOM PROBLEMU DVAJU TELA SA PROMENLJIVIM ZBIROM MASA

Posmatraćemo onaj slučaj problema dvaju tela sa promenljivim zbirom masa u kome masa sistema pretstavlja određenu funkciju rastojanja $s = \overline{m_1 m_2}$ masa m_1 i m_2 tj. u kome je

$$M = \Phi(s), \qquad (s = |\mathfrak{r}| = \overline{m_1 m_2}). \tag{6.1}$$

Vektorska diferencijalna jednačina kretanja

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -\frac{M}{s^3}\mathfrak{r}, \quad (f=1) \tag{6.2}$$

dobija za ovaj slučaj sledeći oblik:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -\frac{\Phi(s)}{s^3}\mathfrak{r}. \tag{6.3}$$

Ova jednačina dopušta integral momenta kvantiteta kretanja i integral žive sile.

Vektorskim množenjem leve i desne strane jednačine (6.3) vektorom $\mathfrak{r}$ dobijamo:

$$\mathfrak{r}\times\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = 0,$$

odakle integracijom dobijamo integral momenta kvantiteta kretanja

$$\mathfrak{r}\times\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{C} \tag{6.4}$$

gde $\mathfrak{C}$ označava vektorsku integracionu konstantu. Iz tog integrala sleduje da se tačke sa promenljivim masama kreću u ravni koja stoji upravno na vektoru $\mathfrak{C}$. Ako sa (s, v) označimo polarne koordinate tačke A sa masom m_1 u toj ravni tada će prema (6.4) skalarni oblik ovog integrala imati oblik:

$$s^2\frac{d\mathrm{v}}{dt} = C, \qquad (C = |\mathfrak{C}|). \tag{6.5}$$

Ako levu i desnu stranu jednačine (6.3) pomnožimo skalarno sa

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt}dt = d\mathfrak{r}$$

dobićemo

$$\dot{\mathfrak{r}}\, d\dot{\mathfrak{r}} = -\frac{\Phi(s)}{s^2}ds, \qquad \left(\dot{\mathfrak{r}} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)$$

ili posle integracije

$$\dot{\mathfrak{r}}^2 = 2h - 2\int \frac{\Phi(s)}{s^2}ds,$$

ili pošto je

$$|\dot{\mathfrak{r}}| = w = |\mathfrak{w}|,$$

to prethodna jednačina postaje

$$w^2 = 2h - 2\int \frac{\Phi(s)}{s^2}ds \tag{6.6}$$

koja pretstavlja integral žive sile i gde h označava integracionu konstantu.

Pošto je

$$w^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + s^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

to integral (6.6) postaje:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + s^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 2h - 2\int \frac{\Phi(s)}{s^2}ds. \tag{6.7}$$

Međutim je

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dv}\cdot\frac{dv}{dt},$$

a iz (6.5)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C}{s^2}, \tag{6.8}$$

pa je

$$\frac{ds}{dt} = \frac{C}{s^2}\frac{ds}{dv}, \tag{6.9}$$

Zamenom izvoda (6.8) i (6.9) u integral žive sile (6.7), dobijamo:

$$\frac{C^2}{s^4}\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 + \frac{C^2}{s^2} = 2h - 2\int \frac{\Phi(s)}{s^2}ds,$$

odakle je

$$\frac{ds}{dv} = \frac{s^2}{C}\left\{2h - \frac{C^2}{s^2} - 2\int \frac{\Phi(s)}{s^2}ds\right\}^{1/2}. \tag{6.10}$$

Ako je za $s=s_1$, $v=v_1$ i funkcija

$$f(s)=\frac{1}{s^2}\left\{2h-\frac{C^2}{s^2}-2\int\frac{\Phi(s)}{s^2}\,ds\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

prestavlja integrabilnu funkciju na segmenu $[s_1, s]$, tada integracijom jednačine (6.10) nalazimo:

$$\int_{s_1}^{s}\left\{2h-\frac{C^2}{s^2}-2\int\frac{\Phi(s)}{s^2}\,ds\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{ds}{s^2}=\frac{v-v_1}{C}, \tag{6.11}$$

tj. inverzijom

$$s=s(v). \tag{6.12}$$

Jednačine u obliku (6.11) ili (6.12) pretstavljaju jednačinu putanje tačke s promenljivom masom u polarnim koordinatama.

Zamenom $s=s(v)$ iz (6.12) u (6.5) dobijamo jednačinu

$$[s(v)]^2\frac{dv}{dt}=C,$$

čijom integracijom dobijamo:

$$\int_{v_1}^{v}[s(v)]^2dv=C(t-t_1). \tag{6.13}$$

Odavde inverzijom se dobija prava anomalija v kao funkcija vremena

$$v=v(t), \tag{6.14}$$

a jednačina (6.12) određuje radius vektor s kao funkciju vremena

$$s=s(t) \tag{6.15}$$

Na ovaj način problem relativnog kretanja tačke sa promenljivom masom m_1 je u potpunosti rešen.

Zakon promene mase sistema M u funkciji vremena može se tada dobiti zamenom (6.15) u relaciju (6.1) tako da je

$$M=\Phi\{s(t)\}=M(t).$$

Za specijalni slučaj u kome je

$$\Phi(s)=M_0+M_1s^3, \tag{6.17}$$

vektorska diferencijalna jednačina (6.2) dobija oblik

$$\ddot{\mathfrak{r}}+\frac{M_0}{s^3}\mathfrak{r}=-M_1\mathfrak{r}. \tag{6.18}$$

Problem u ovom slučaju postaje identičan sa problemom fotogravitacione Nebeske mehanike koji u [19] tretira *V. V. Radzievski,* a koji se odnosi na perturbirano kretanje dvaju tela u homogenom sfernom obliku.

Radzievski daje rešenje ovoga problema, kao i jednačinu putanje u obliku:

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{R_0}^{R} \frac{\frac{C}{R} dR}{\sqrt{-C^2 + 2\mu R + \alpha R^2 - kR^4}}, \tag{6.19}$$

koja se izvodi iz jednačine (6.12) za specijalnu vrednost (6.17) funkcije $\Phi(s)$.

Od interesa je napomenuti da se problem *Radzievskog* može tretirati i kao problem perturbiranog keplerovskog kretanja sa perturbirajućom silom

$$\mathfrak{Y} = -M_1 \mathfrak{r}, \quad (M_1 = \mathrm{const.}) \tag{6.20}$$

čija je egzistencija uslovljena kretanjem dvaju tela u homogenom sfernom oblaku.

ZUSAMMENFASSUNG

BEITRÄGE ZUR UNTERSUCHUNG DES ZWEIKÖRPERPROBLEMS MIT VERÄNDERLICHER MASSENSUMME

Dobrivoje Mihailović

In diesem Artikel hat Verfasser seine Beiträge in bezug auf die Untersuchung des Zweikörperproblems mit veränderlichen Massen, welche er in [11], [12], [16] publiziert hatte, in Ganzheit gegeben. Diese Beiträge stellen eine Fortsetzung der Arbeiten von *Batirev* [9], und *Duboschin* [8] dar. Der Artikel ist in sechs Abschnitte geteilt.

Im ersten Abschnitt gibt Verfasser die Grundgleichung der Punktdynamik mit veränderlicher Masse in der Form von Meschtscherski, Levi—Civita und Gyldèn. Ebenso gibt er die Rolle dieses Problems in Astrophysik und Cosmogonie vor, und endlich, er stellt einige wichtigeren Arbeiten italienischer und russischer Gelehrten vor.

Im zweiten Abschnitt gibt Verfasser den Inhalt des Artikels von Batirev [9] vor. Das Gesetz für die Veränderung der Massensumme ist hier mit der Gleichung (2.3) gegeben. Benutzend Transformationen (2.4) und (2.5) reduziert Batirev das Problem auf das klassische Zweikörperproblem. Das qualitative Analysis der Bahnkurvenformen gibt Batirev auf dem Grunde der Abbildung der Spiralbahnkurven auf die Kegelschnitte in dem Zweikörperproblem der Himmelsmechanik.

Im dritten Abschnitt gab Verfasser allgemeine Transformationen zur Reduktion dieses Problems auf das, mit unveränderlichen Massensumme. Diese Transformationen sind mit den Gleichungen (3.30) gegeben wobei die Funktionen $F(t)$, $\varphi(t)$, $M(t)$ den Gleichungen (3.17) Genüge leisten. Die Transformationen von Batirev werden aus gefundenen Transformationen als ein spezieller Fall bekommen.

Der vierte Abschnitt stellt einen Beitrag zum qualitativen Analysis der Bahnkurvenformen in diesem Problem dar. Verfasser gibt eine Relation zwischen dem Vektor der Geschwindigkeit des Punktes mit veränderlicher Masse und der Geschwindigkeit des entsprechenden Punktes auf dem Kegelschnitte. Ebenso kommt der Verfasser hier zu den folgenden Ergebnissen: 1) sectorielle Geschwindigkeiten dieser zwei Punkte haben gleiche scalare Grösse; 2) Orientationen der Bahnebenen und Richtungen der Bewegung auf diesen Bahnkurven sind entgegengesetzt. In Anwendung der Sätze von Duboschin zeigte Verfasser, dass Charakter der Bahnkurven weder periodisch

noch assymptotisch sein kann und die Bahnkurven keine Elipse wie ihre Grenzlage haben können.

Im fünften Abschnitt gab Verfasser die Lösungen des Problems benutzend die Transformation von Batirev und auch die Gruppe der vektoriellen Elementen von Milankovitsch. Die Lösungen sind durch die Relationen (5.15), (5.18) und (5.16) für das eliptische, durch die Gleichungen (5.33), (5.34) und (5.35) für das hyperbolische und durch die Gleichungen (5.52), (5.57) und (5.54) für das parabolische Typus der Bewegung gegeben.

Im sechsten Abschnitt stellt Verfasser dar, dass $M = \Phi(s)$, $(s = \overline{m_1 m_2})$ und reduziert das Problem unmittelbar auf das klassische Problem. Durch die bekannten Integrale gibt er die Gleichung der Bahnkurve, die Lösung des Problems und Möglichkeit zum Gewinn der Funktionen $M(t)$. Für

$$M = M_0 + M_1 s^3$$

gab Verfasser eine Verbindung zwischen diesem Problem und dem Dreikörperproblem, das *V. V. Radzievski* in [17] untersucht.

LITERATURA

[1] *Л. Г. Лойцанский — А. И. Лурье, Курс теоретической механики II* Огиз — Гостехиздат — 1948.

[2] *G. Armellini, Il problema dei due corpi di masse variabili* (Rend. Acc. Lincei, 1911).

[3] *D. Graffi, Sopra un caso speciale del problema dei due copri* (Bolletino della Unione Matematica Italiana, Anno XIII, N. 1, Bologna, 1934, 95-100).

[4] *D. Graffi, Sul problema dei due corpi di masse variabile* (Ann. Univ. Ferrara, Sec. VII, 1952, 23-33).

[5] *G. Armellini, Sopra le variazioni dell'eccentricita nel problema astronomico dei due corpi di masse decrescenti* (Rend. Lincei-Rend. Sc. fis. mat. e nat.-Vol XV, dicembre 1953).

[6] *G. Armellini, Osservazioni sul problema dei due corpi di masse variabili e sopra alcune sua applicazioni alla cosmogonia* (Atti Accad. Lincei Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur., 14, N. 6, 1953).

[7] *E. De Garo, Sulla variazione degli elementi orbitali nel moto relativo di due astri di masse variabili.*

[8] *Г. Н. Дубошин, Note sur la forme des trajectoires dans le problème des deux corps des masses variables* (Астрономический журнал, IX, Nr. 1—2, 1932, 53-56 и VII, Nr. 3—4, 1930).

[9] *А. А. Батырев, О формах траекторий в задаче двух тел с переменными масами* (Астрономический журнал, XXVI, I, 1949, 56—59)

[10] *D. Mihailović, Referat* na članak [9] („Vesnik DMF NRS", I, Nr. 2, Beograd 1949, 63-64).

[11] *D. Mihailović, O jednom opštijem načinu za redukciju problema dvaju tela sa promenljivim masama na problem dvaju tela sa stalnim zbirom masa* („Vesnik DMF NRS", V, Nr. 1—2, Beograd, 1953, 67-76).

[12] *D. Mihailović, Prilog kvalitativnoj analizi oblika putanja u problemu dvaju tela sa promenljivim zbirom masa* („Vesnik DMF NRS", IV, Nr. 3-4, Beograd, 1952, 49-52).

[13] *M. Milanković, O upotrebi vektorskih elemenata u računu planetskih poremećaja* (Glas SAN, prvi razred, A. Matematičke nauke, Beograd, 1939, 3-72).

[14] *M. Milanković, Osnovi Nebeske mehanike* (Univerzitet u Beogr du, Beograd, 1947 i 1955).

[15] *E. A. Milne, Vectorial Mechanics* (Interscience Publichers Inc.: New-York, 1948).

[16] *D. Mihailović, Primena vektorskih elemenata na rešenje problema dvaju tela sa promenljivim zbirom masa* („Vesnik DMF NRS", V, Nr. 3-4, Beograd, 1953, 93-109).

[17] *F. R. Moulton, Einführung in die Himmelsmechanik* (Deutsche Ausgabe von W. Fender, Berlin, 1927).

[18] Астрономический журнал, 18, Nr. 4-5, 1941.

[19] *В. В. Радзиевский, Общее решение одного случая задачи трех тел* (докл. АН СССР, 1953, 91, Nr. 6, 1309-1311).

[20] *D. Mihailović, O putanjama u jednom specijalnom problemu dvaju tela s promenljivim masama* (u rukopisu).