PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 28 (1959)

INTEGRALNE TEOREME KARAKTERISTIKA ELEKTRIČNIH MREŽA

Radoslav D. Horvat

Uopštene karakteristike linearnih, konačnih, pasivnih, bilateralnih električnih mreža sa konstantnim koncentrisanim parametrima definišu se kao količnici kompleksnih eksponencijalnih funkcija — simboličkih pretstavnika pseudoperiodičnog napona i struje, pseudoperiodične struje i napona, dva napona ili dve struje [3,7,11,12*]. Često se one definišu i kao količnici odgovarajućih Laplasovih transformacija promenljivih nopona i struja. Karakteristikama električnih mreža nazivaju se i logaritmi mernih brojeva gornjih količnika.

Uopštene karakteristike električnih mreža su racionalne funkcije kompleksne učestanosti.[8,11,12] Osobine koje mora racionalna funkcija kompleksne promenljive imati da bi mogla pretstavljati karakteristiku električne mreže izučavaju se u sintezi električnih mreža.

Ako racionalna funkcija kompleksne učestanosti pretstavlja ulaznu impedansu ili admitansu, ona mora pripadati klasi takozvanih pozitivnih funkcija sa realnim koeficijentima. [8,12] To znači da ona mora biti realna za realne vrednosti promenljive i da njen realni deo mora biti pozitivan kada je realni deo promenljive pozitivan. Drugim rečima svakoj tački u desnoj polovini ravni kompleksne učestanosti odgovara tačka u desnoj polovini ravni funkcije. Tačkama na osi realnih vrednosti promenljive odgovaraju tačke na osi realnih vrednosti funkcije.

Da bi funkcija ovaj uslov zadovoljila ona mora biti analitička u desnoj polovini ravni kompleksne učestanosti.[8,11,12] Na osi imaginarnih vrednosti kompleksne učestanosti ona može imati polove, ali oni moraju biti prosti, a ostaci u njima realni i pozitivni. Kako je na ovoj osi kompleksna učestanost $\hat{p} = j\omega$,** gde je ω kružna učestanost prostoperiodičnog režima, ona se često naziva i osom realnih učestanosti. Da ulazne karakteristike ne mogu imati polove u desnoj polovini ravni kompleksne učestanosti jasno je i fizički, jer su polovima ulazne impedanse i admitanse određene sopstvene kompleksne učestanosti slobodnog režima koje za pasivne mreže ne mogu imati pozitivne realne delove.

*Brojevi iznad reči se odnose na literaturu na koju se autor poziva.
**Polukružić iznad slova pokazuje da ono pretstavlja kompleksnu veličinu.

U ovome radu pokazaćemo da se za karakteristike koje zadovoljavaju gornje uslove, a nemaju polove za $\breve{p} = 0$ u $\breve{p} = \infty$, može izvesti primenom Košijeve teoreme iz teorije funkcija kompleksne promenljive čitav niz teorema između njihovih realnih i imaginarnih delova. Kompleksne funkcije moraju zadovoljavati ove teoreme da bi mogle pretstavljati karakteristike električnih mreža. Videćemo da izvedene relacije osim toga određuju i koeficijente potencijalnih redova za niske i visoke učestanosti jednog od delova karakteristike, realnog ili imaginarnog, kada je drugi poznat na osi realne učestanosti, te prema tome i cele karakteristike mreže.

Prilikom izvođenja ovih teorema posmatraćemo kao karakteristiku električne mreže njenu uopštenu ulaznu impedansu. Dobijene relacije važiće i za ulaznu admitansu, jer je ona istih osobina kao i ulazna impedansa. One će takođe važiti i za svaku prenosnu karakteristiku koja je analitička u desnoj polovini ravni kompleksne učestanosti i koja ima isto ponašanje kao i ulazna impedansa na osi realne učestanosti.

U literaturi se pokazuje da se integral količnika između imaginarnog dela ulazne impedanse na osi učestanosti i kružne učestanosti ω u granicama od $\omega = 0$ do $\omega = \infty$ može izraziti pomoću razlike vrednosti realnog dela karakteristike za ove granične učestanosti pod pretpostavkom da su one ograničene. Ova relacija poznata je pod imenom teoreme o integralu reaktanse.[3,7,11,12] Ona važi i za bilo koju drugu karakteristiku mreže, ne samo ulaznu impedansu, pod uslovom da karakteristika nema pol u početku, tački u beskonačnosti i bilo kojoj drugoj tački u desnoj polovini ravni kompleksne učestanosti.

Do ove teoreme dolazi se primenom Košijeve na funkciju $\dfrac{\breve{Z}(\breve{p})}{\breve{p}}$ i konturu sa sl. 1, tražeći graničnu vrednost konturnog integrala kada $r \to \infty$ a $\rho \to 0$. Sa $\breve{Z}(\breve{p})$ označena je karakteristika električne mreže. Tako se dolazi do relacije

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ \rho \to 0}} \int_{(C_1)} \frac{\breve{Z}(\breve{p})}{\breve{p}}\, d\breve{p} + \lim_{\rho \to 0} \int_{(C_2)} \frac{\breve{Z}(\breve{p})}{\breve{p}}\, d\breve{p} + \lim_{\substack{r \to \infty \\ \rho \to 0}} \int_{(C_3)} \frac{\breve{Z}(\breve{p})}{\breve{p}}\, d\breve{p} + \lim_{r \to \infty} \int_{(C_4)} \frac{\breve{Z}(\breve{p})}{\breve{p}}\, d\breve{p} = 0.$$

Na delovima (C_1) i (C_3) ose realnih učestanosti uzimajući da je $\breve{p} = j\omega$ integrand postaje

$$\frac{R(\omega) + j\,X(\omega)}{j\omega}$$

Stoga odgovarajući integrali po ovim dužima imaju zbir

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ \rho \to 0}} \left[\int_{-r}^{-\rho} \frac{R(\omega) + j X(\omega)}{\omega}\, d\omega + \int_{\rho}^{r} \frac{R(\omega) + j X(\omega)}{\omega}\, d\omega \right] = j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(\omega)}{\omega}\, d\omega.$$

jer je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\omega)}{\omega}\, d\omega = \int_{-\infty}^{0} \frac{R(\omega)}{\omega}\, d\omega + \int_{0}^{\infty} \frac{R(\omega)}{\omega}\, d\omega = 0,$$

s obzirom da je realni deo karakteristike $R(\omega)$ uvek parna funkcija učestanosti.

Na polukružiću (C_2) karakteristika mreže se može pretstaviti Maklorenovim redom oblika,

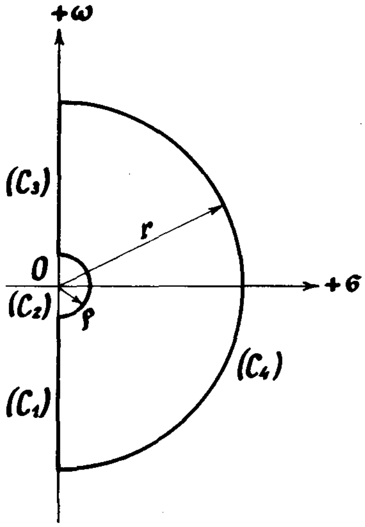
$$\breve{Z}(\breve{p}) = A_0 + A_1 \breve{p} + A_2 \breve{p}^2 + A_3 \breve{p}^3 + \ldots,$$

pod pretpostavkom da je u tački $\breve{p} = 0$ analitička. Koeficijenti reda određeni su njenim izvodima za $\breve{p} = 0$. Oni su realni, jer i karakteristika mreže ima realne koeficijente.[7] Odgovarajući integral po ovome polukružiću postaje stoga

$$\lim_{\rho \to 0\,(C_2)} \int \frac{\breve{Z}(\breve{p})}{\breve{p}}\, d\breve{p} = \lim_{\rho \to 0\,(C_2)} \int \frac{A_0}{\breve{p}}\, d\breve{p}.$$

Integrali ostalih članova reda funkcije $\frac{Z(\breve{p})}{\breve{p}}$ imaju graničnu vrednost jednaku nuli kada $\rho \to 0$. Smenom kompleksne učestanosti na ovome polukružiću sa $\breve{p} = \rho e^{j\theta}$ i daljim izračunavanjem ovaj integral postaje

$$\lim_{\rho \to 0\,(C_2)} \int \frac{\breve{Z}(\breve{p})}{\breve{p}}\, d\breve{p} = j\pi A_0.$$



Sl. 1

Kako je pretpostavka da tačka u beskonačnosti nije pol karakteristike, ona se na polukrugu (C_4) može pretstaviti redom

$$\breve{Z}(\breve{p}) = B_0 + \frac{B_1}{\breve{p}} + \frac{B_2}{\breve{p}^2} + \frac{B_3}{\breve{p}^3} + \ldots.$$

Koeficijenti i ovoga reda su realni.[7] Oni su određeni izvodima funkcije koja se dobija kada se u karakteristici mreže kompleksna učestanost smeni svojom recipročnom kompleksnom veličinom, i to u tački u kojoj nova promenljiva ima vrednost nulu. Stoga je na istome polukrugu

$$\frac{\breve{Z}(\breve{p})}{\breve{p}} = \frac{B_0}{\breve{p}} + \frac{B_1}{\breve{p}^2} + \frac{B_2}{\breve{p}^3} + \ldots,$$

a granična vrednost integrala gornje funkcije po ovome polukrugu

$$\lim_{r \to \infty\,(C_4)} \int \frac{\breve{Z}(\breve{p})}{\breve{p}}\, d\breve{p} = \lim_{r \to \infty\,(C_4)} \int \frac{B_0}{\breve{p}}\, d\breve{p} = -j\pi B_0.$$

Integrali ostalih članova reda imaju i u ovom slučaju graničnu vrednost jednaku nuli.

Prema izračunatim vrednostima relacija napisana na osnovu Košijeve teoreme postaje

$$j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(\omega)}{\omega}\, d\omega + j\pi A_0 - j\pi B_0 = 0$$

Uzimajući još u obzir da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(\omega)}{\omega}\, d\omega = \int_{-\infty}^{0} \frac{X(\omega)}{\omega}\, d\omega + \int_{0}^{\infty} \frac{X(\omega)}{\omega}\, d\omega = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{X(\omega)}{\omega}\, d\omega ,$$

jer je imaginarni deo karakteristike $X(\omega)$ neparna funkcije kružne učestanosti, ona se svodi na

$$\int_{0}^{\infty} \frac{X(\omega)}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2}\,(B_0 - A_0).$$

Iz Maklorenovog reda karakteristike u okolini tačke $\breve{p} = 0$, koji na osi realnih učestanosti uzima oblik

$$\breve{Z}(j\omega) = A_0 + jA_1\omega - A_2\omega^2 - jA_3\omega^3 + \ldots ,$$

mogu se napisati i odgovarajući redovi koji će pretstavljati njen realni i imaginarni deo za male vrednosti kružne učestanosti manje od modula najbliže njene singularne tačke početku. Ovi redovi imaju oblik:

$$R(\omega) = A_0 - A_2\omega^2 + A_4\omega^4 - \ldots$$

i

$$X(\omega) = A_1\omega - A_3\omega^3 + A_5\omega^5 - \ldots$$

Prvi red pokazuje da je koeficijent A_0 jednak vrednosti realnog dela karakteristike za $\omega = 0$.

Analogno se i iz reda kojim je karakteristika pretstavljena van najmanjeg kruga koji obuhvata sve njene singularne tačke, a koji na osi učestanosti uzima oblik

$$\breve{Z}(j\omega) = B_0 - j\frac{B_1}{\omega} - \frac{B_2}{\omega^2} + j\frac{B_3}{\omega^3} + \ldots ,$$

dobijaju i redovi koji pretstavljaju realni i imaginarni deo karakteristike za visoke vrednosti kružne učestanosti, veće od modula najudaljenije singularne tačke od koordinatnog početka. Oni su

$$R(\omega) = B_0 - \frac{B_2}{\omega^2} + \frac{B_4}{\omega^4} - \ldots ,$$

$$X(\omega) = -\frac{B_1}{\omega} + \frac{B_3}{\omega^3} - \frac{B_5}{\omega^5} + \ldots .$$

Iz reda za realni deo karakteristike se vidi da je $B_0 = \lim_{\omega \to \infty} R(\omega) = R(\infty)$.

Stoga se izvedena relacija, koja pretstavlja teoremu o integralu reaktanse, može napisati u obliku

$$\int_0^\infty \frac{X(\omega)}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}\Big[R(\infty) - R(0)\Big].$$

Ona pokazuje da je površina ispod krive $\frac{X(\omega)}{\omega}$ zavisna samo od razlike vrednosti realnog dela karakteristike za $\omega = \infty$ i $\omega = 0$, a ne i od njegove varijacije.

Smenom $u = ln\frac{\omega}{\omega_0}$, gde je ω_0 proizvoljna određena kružna učestanost, gornja relacija postaje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega_0 e^u)\, du = \frac{\pi}{2}\Big[R(\infty) - R(0)\Big].$$

U ovom obliku napisana, teorema kazuje da sve krive koje pretstavljaju imaginarne delove karakteristike na osi učestanosti, nacrtane u logaritamskoj razmeri, zaklapaju sa apscisnom osom iste površine, ako odgovarajući realni delovi imaju iste vrednosti za $\omega = \infty$ i $\omega = 0$. Teorema se koristi u projektovanju pojačavača.

Druga teorema, koja se takođe koristi u projektovanju pojačavača, a koja je u literaturi poznata pod imenom teoreme o integralu aktivne otpornosti[3,7,11,12], kazuje da vrednost integrala realnog dela karakteristike po osi učestanosti, umanjenog za njegovu vrednost za $\omega = \infty$, zavisi isključivo od ponašanja imaginarnog dela u beskonačnosti. Opet se pretpostavlja da tačka u beskonačnosti nije pol karakteristike.

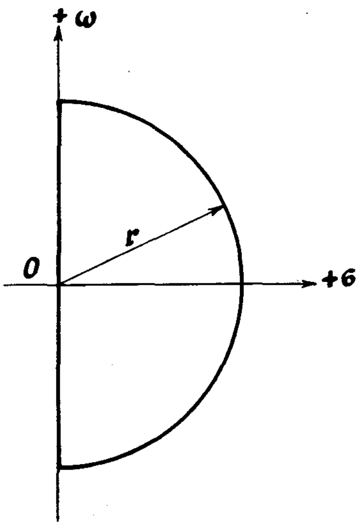
Prilikom izvođenja ove teoreme primenjuje se Košijeva teorema na funkciju

$$\breve{Z}(p) - B_0 = \frac{B_1}{\breve{p}} + \frac{B_2}{\breve{p}^2} + \frac{B_3}{\breve{p}^3} + \ldots$$

Određuje se granična vrednost konturnog integrala gornje funkcije po konturi sastavljenoj od imaginarne ose i polukruga u dasnoj polovini ravni (sl. 2) kada poluprečnik ovoga polukruga teži neograničeno velikoj vrednosti. Od karakteristike $\breve{Z}(\breve{p})$ se oduzima prvi član njenoga reda da bi integrand težio ka nuli bar kao $\frac{1}{\breve{p}}$ i time integral po posmatranome polukrugu imao smisla. On se svodi na integral funkcije $\frac{B_1}{\breve{p}}$, jer su granične vrednosti integrala ostalih članova reda funkcije $\breve{Z}(\breve{p}) - B_0$, kada $r \to \infty$, jednake nuli.

Uzimajući da je na imaginarnoj osi $\breve{p} = j\omega$, a na polukrugu $\breve{p} = re^{j\theta}$ Košijeva teorema dovodi do relacije

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[R(\omega) + jX(\omega) - B_0 \right] d\omega + B_1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta = 0.$$



Sl. 2

Kako je međutim

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, d\omega = 0$$

i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [R(\omega) - B_0]\, d\omega = 2 \int_{0}^{\infty} [R(\omega) - B_0]\, d\omega,$$

jer je $X(\omega)$ neparna, a $R(\omega) - B_0$ parna funkcija kružne učestanosti, to gornja relacija postaje

$$\int_{0}^{\infty} [R(\omega) - B_0]\, d\omega = \frac{\pi}{2} B_1.$$

Redovi koji pretstavljaju realni i imaginarni deo karakteristike za visoke učestanosti pokazuju da koeficijenti u ovoj relaciji imaju sledeće vrednosti

$$B_0 = \lim_{\omega \to \infty} R(\omega) = R(\infty)$$

i

$$B_1 = -\lim_{\omega \to \infty} \omega X(\omega).$$

Stoga se ona može napisati i u obliku

$$\int_{0}^{\infty} [R(\omega) - R(\infty)]\, d\omega = -\frac{\pi}{2} \lim_{\omega \to \infty} \omega X(\omega).$$

U ovom obliku napisana gornja relacija pretstavlja teoremu o integralu aktivne otpornosti. Ona kazuje da površina ispod krive realnog dela karakteristike spuštene za njegovu vrednost za $\omega = \infty$, zavisi od ponašanja proizvoda imaginarnog dela karakteristike na osi učestanosti $X(\omega)$ i kružne učestanosti ω u beskonačnosti.

Gornja teorema ujedno određuje vrednost koeficijenta B_1 reda imaginarnog dela karakteristike za visoke učestanosti pomoću integrala njenog realnog dela po osi učestanosti

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) - B_0]\, d\omega.$$

Pokazaćemo sada da se isto tako i svi ostali koeficijenti ovoga reda mogu pretstaviti integralima po osi učestanosti odgovarajućih funkcija koje su potpuno određene realnim delom karakteristike. A takođe i da se koeficijenti reda realnog dela karakteristike za visoke učestanosti mogu pretstaviti integralima funkcija koje su određene imaginarnim delom.

Potrebno je uzeti

$$\breve{G}(\breve{p}) = \breve{p}^n \left[\breve{Z}(\breve{p}) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{B_k}{\breve{p}^k} \right]$$

kao funkciju na koju se primenjuje Košijeva teorema po konturi sastavljenoj od imaginarne ose i polukruga u desnoj polovini ravni, umesto $\breve{Z}(\breve{p}) - B_0$. Od karakteristike oduzimaju se prva $n+1$ člana njenoga Loranovog reda za oblast van kruga oko početka koji sadrži sve polove karakteristike. Potom se ova razlika množi sa $\breve{p}^n$, gde je n ceo pozitivan broj ili nula. Stoga je uzeta funkcija na posmatranome polukrugu pretstavljena redom

$$\breve{G}(\breve{p}) = \frac{B_{n+1}}{\breve{p}} + \frac{B_{n+2}}{\breve{p}^2} + \frac{B_{n+3}}{\breve{p}^3} + \dots$$

Da se nije od karakteristike oduzeo konačan broj članova njenoga reda, integral gornje funkcije po polukrugu, kada $r \to \infty$, ne bi imao smisla.

Košijeva teorema u ovom slučaju dovodi do relacije

$$j^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^n \left[R(\omega) + jX(\omega) - \sum_{k=0}^{n} j^{-k} B_k \omega^{-k} \right] d\omega + j \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} B_{n+1}\, d\theta = 0,$$

uzimajući opet da je na imaginarnoj osi $\breve{p} = j\omega$, a na polukrugu $\breve{p} = re^{j\theta}$.

Ako je n paran broj, nakon smene $n = 2m$ i razdvajanja zbira pod integralom na parni i neparni deo, ova relacija postaje

$$(-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m} \left\{ \left[R(\omega) - \sum_{l=0}^{m} (-1)^l B_{2l} \omega^{-2l} \right] + j \left[X(\omega) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l B_{2l+1} \omega^{-(2l+1)} \right] \right\} d\omega - B_{2m+1} \pi = 0.$$

Uzimajući u obzir da je integral parne funkcije

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m} \left[R(\omega) - \sum_{l=0}^{m} (-1)^l B_{2l} \omega^{-2l} \right] d\omega = 2 \int_{0}^{\infty} \omega^{2m} \left[R(\omega) - \sum_{l=0}^{m} (-1)^l B_{2l} \omega^{-2l} \right] d\omega,$$

a neparne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m} \left[X(\omega) + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l B_{2l+1} \omega^{-(2l+1)} \right] d\omega = 0,$$

iz nje se dobija

$$\int_{0}^{\infty} \omega^{2m} \left[R(\omega) - \sum_{l=0}^{m} (-1)^l B_{2l} \omega^{-2l} \right] d\omega = (-1)^m \frac{\pi}{2} B_{2m+1}$$

A ako je n neparan broj, nakon smene $n = 2m - 1$, gornja relacija postaje

$$(-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m-1} \left\{ \left[R(\omega) - \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l B_{2l} \omega^{2l} \right] + j \left[X(\omega) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l B_{2l+1} \omega^{-(2l+1)} \right] \right\} d\omega - j\pi B_{2m} = 0.$$

Sada je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m-1} \left[R(\omega) - \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l B_{2l} \omega^{-2l} \right] d\omega = 0$$

i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m-1} \left[X(\omega) + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l B_{2l+1} \omega^{-(2l+1)} \right] d\omega =$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} \omega^{2m-1} \left[X(\omega) + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l B_{2l+1} \omega^{-(2l+1)} d\omega, \right.$$

te je

$$\int_{0}^{\infty} \omega^{2m-1} \left[X(\omega) + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l B_{2l+1} \omega^{-(2l+1)} \right] d\omega = (-1)^m \frac{\pi}{2} B_{2m}.$$

U izvedenim relacijama m može biti ma koji ceo pozitivan broj, a u prvoj i nula. Za $m=0$ prva relacija se svodi na teoremu o integralu aktivne otpornosti

$$\int_0^\infty \left[R(\omega)-B_0\right] d\omega = \frac{\pi}{2} B_1.$$

Za $m=1$ iz druge relacije se dobija

$$\int_0^\infty \omega \left[X(\omega)-\frac{B_1}{\omega}\right] d\omega = -\frac{\pi}{2} B_2.$$

I ova relacija pretstavlja jednu teoremu o integralu imaginarnog dela karakteristike na osi učestanosti. Ona postavlja jedno ograničenje, koje funkcije $R(\omega)$ i $X(\omega)$ moraju zadovoljavati, da bi pretstavljale realni i imaginarni deo karakteristike električne mreže. I za svako drugo m dobija se po jedna teorema iz ovih relacija, koja pretstavlja određenu osobinu karakteristike električne mreže. Koeficijenti B pretstavljaju i koeficijente redova funkcija $R(\omega)$ i $X(\omega)$ za visoke učestanosti, veće od najvećeg modula polova karakteristike. tj. redova

$$R(\omega)=B_0-\frac{B_2}{\omega^2}+\frac{B_4}{\omega^4}-\ldots=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{B_{2m}}{\omega^{2m}}$$

i

$$X(\omega)=-\frac{B_1}{\omega}+\frac{B_3}{\omega^3}-\frac{B_5}{\omega^5}+\ldots=-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{B_{2m+1}}{\omega^{2m+1}}.$$

Iz izvedenih relacija mogu se odrediti i eksplicitno ovi koeficijenti. Iz prve relacije se dobija obrazac za koeficijente reda funkcije $X(\omega)$ u obliku

$$(-1)^m B_{2m+1}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\omega^{2m} R(\omega)-\sum_{l=0}^{m}(-1)^l B_{2l}\,\omega^{2(m-l)}\right] d\omega,\ (m=0,1,2..).$$

Ovi koeficijenti su potpuno određeni realnim delom karakteristike na osi realnih učestanosti. Koeficijenti koji se javljaju pod integralom lako se određuju takođe iz realnog dela karakteristike, jer pretstavljaju koeficijente njegovog reda. Najlakše se određuju preko funkcije koja se dobija uvođenjem recipročne veličine od kružne učestanosti kao nove promenljive u $R(\omega)$. Stoga se red koji pretstavlja imaginarni deo karakteristike za visoke učestanosti može napisati i u obliku

$$X(\omega)=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^\infty\left[\lambda^{2m} R(\lambda)-\sum_{l=0}^{m}(-1)^l B_{2l}\lambda^{2(m-l)}\right]d\lambda\right\}\frac{1}{\omega^{2m+1}},$$

u kome je jasnoće radi promenljiva u integralu ω zamenjena sa λ.

Druga relacija eksplicitno određuje koeficijente reda realnog dela karakteristike za visoke učestanosti, sem koeficijenta B_0, pomoću njenog imaginarnog dela na osi realnih učestanosti

$$(-1)^m B_{2m} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\omega^{2m-1} X(\omega) + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l B_{2l+1} \omega^{2(m-l-1)} \right] d\omega, \quad (m = 1,2,3..).$$

Da bi ovaj red, koji se prema gornjem izrazu može napisati i u obliku

$$R(\omega) = B_0 + \sum_{m=1}^\infty \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \left[\lambda^{2m-1} X(\lambda) + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l B_{2l+1} \lambda^{2(m-l-1)} \right] d\lambda \right\} \frac{1}{\omega^{2m}},$$

bio potpuno određen, potrebno je znati koeficijent $B_0 = R(\infty)$ ili podatak koji dopušta njegovo određivanje. Imaginarni deo karakteristike određuje realni na osi realnih učestanosti približno na jednu konstantu.

Pokazaćemo još da se i koeficijenti redova

$$R(\omega) = A_0 - A_2 \omega^2 + A_4 \omega^4 - \ldots = \sum_{m=0}^\infty (-1)^m A_{2m} \omega^{2m}$$

i

$$X(\omega) = A_1 \omega - A_3 \omega^3 + A_5 \omega^5 - \ldots = \sum_{m=0}^\infty (-1)^m A_{2m+1} \omega^{2m+1},$$

koji pretstavljaju realni i imaginarni deo karakteristike za niske učestanosti, manje od najmanjeg modula njenih polova, mogu pretstaviti integralima funkcija koje su potpuno određene u prvom slučaju imaginarnim, a u drugom realnim delom karakteristike na osi realnih učestanosti.

Do tih izraza dolazimo takođe primenom Košijeve teoreme. Za funkciju potrebno je uzeti onu koja se dobija kada se od karakteristike mreže oduzmu prvih $n+1$ člana njenoga Maklorenovog reda, pa ova razlika podeli sa $\breve{p}^{n+2}$ tj.

$$\breve{H}(\breve{p}) = \left[\breve{Z}(\breve{p}) - \sum_{k=0}^{n} A_k \breve{p}^k \right] \cdot \frac{1}{\breve{p}^{n+2}}.$$

n je u ovome izrazu ma koji ceo pozitivan broj ili nula. Kako ova funkcija ima pol u tački $\breve{p} = 0$, za konturu se uzima ona sa sl. 1 koju smo koristili prilikom izvođenja teoreme o integralu reaktanse. Ona sadrži i polukružić oko početka, pored imaginarne ose i polukruga velikog poluprečnika, takođe oko početka. Kao i ranije granična vrednost konturnog integrala, kada $r \to \infty$, a $\rho \to 0$, izjednačuje se sa nulom.

Pretstavljajući karakteristiku mreže $\breve{Z}(\breve{p})$ Maklorenovim redom na polukružiću (C_2) poluprečnika ρ dobija se za funkciju $\breve{H}(\breve{p})$ na istom polukružiću red

$$\breve{H}(\breve{p}) = \frac{A_{n+1}}{\breve{p}} + A_{n+2} + A_{n+3}\breve{p} + \ldots$$

Granična vrednost njenoga integrala po njemu je

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{(C_2)} \breve{H}(\breve{p})\, d\breve{p} = \lim_{\rho \to 0} A_{n+1} \int_{(C_2)} \frac{d\breve{p}}{\breve{p}} = j\pi A_{n+1}.$$

Da od karakteristike mreže nismo oduzeli navedeni broj članova njenoga Maklorenovog reda, integral po ovome polukružiću (C_2), kada $\rho \to 0$, ne bi imao konačnu vrednost. Međutim granična vrednost integrala ove funkcije $\breve{H}(\breve{p})$ po polukrugu (C_4), kada $r \to \infty$, je nula, jer funkcija $\breve{H}(\breve{p})$ brže teži nuli od funkcije $\frac{1}{\breve{p}}$ za svako n.

Stoga Košijeva teorema dovodi u ovom slučaju do relacije

$$\frac{1}{j^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[R(\omega) + j\,X(\omega) - \sum_{k=0}^{n} j^k A_k \omega^k \right] \frac{d\omega}{\omega^{n+2}} + j\pi A_{n+1} = 0.$$

Pod integralom treba podrazumevati njegovu glavnu vrednost u Košijevom smislu.

Kada je n parni broj $2m$, posle rastavljanja zbira pod integralom na parni i neparni deo, gornja relacija postaje

$$(-1)^{m+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[R(\omega) - \sum_{l=0}^{m} (-1)^l A_{2l} \omega^{2l} \right] + j \left[X(\omega) - \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l A_{2l+1} \omega^{2l+1} \right] \right\} \frac{d\omega}{\omega^{2m+2}} +$$
$$+ \pi A_{2+1} = 0.$$

Uzimajući u obzir da je vrednost integrala u intervalu od $-\infty$ do $+\infty$ parne funkcije, kakva je realni deo gornjeg integranda, dva puta veća od njegove vrednosti u intervalu 0 do $+\infty$ i da je vrednost integrala neparne funkcije, kakva je imaginarni deo integranda, od $-\infty$ do $+\infty$ jednaka nuli, relacija se svodi na

$$\int_{0}^{\infty} \left[R(\omega) - \sum_{l=0}^{m} (-1)^l A_{2l} \omega^{2l} \right] \frac{d\omega}{\omega^{2m+2}} = (-1)^m \frac{\pi}{2} A_{2m+1}.$$

Integrand u ovome integralu, koji je u okolini tačke $\omega = 0$ prema redu za $R(\omega)$

$$\left[R(\omega) - \sum_{l=0}^{m}(-1)^l A_{2l}\omega^{2l}\right]\frac{1}{\omega^{2m+2}} = \sum_{l=m+2}^{\infty}(-1)^l A_{2l}\,\omega^{2(l-m-1)},$$

nije prekidna funkcija za $\omega = 0$.

Međutim kada je n neparan broj $2m-1$, posmatrana relacija postaje

$$(-1)^m\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[R(\omega) - \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l A_{2l}\omega^{2l}\right] + j\left[X(\omega) - \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l A_{2l+1}\,\omega^{2l+1}\right]\right\}\frac{d\omega}{\omega^{2m+1}} +$$

$$+ j\pi A_{2m} = 0.$$

Uzimajući u obzir da je realni deo funkcije pod znakom integrala neparna, a imaginarni deo parna funkcija kružne učestanosti, relacija se svodi na

$$\int_0^{\infty}\left[X(\omega) - \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l A_{2l+1}\,\omega^{2l+1}\right]\frac{d\omega}{\omega^{2m+1}} = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{2}A_{2m}.$$

Vrednost integranda za $\omega = 0$, koji se prema redu za $X(\omega)$ može pisati i u obliku

$$\left[X(\omega) - \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l A_{2l+1}\,\omega^{2l+1}\right]\frac{1}{\omega^{2m+1}} = \sum_{l=m}^{\infty}(-1)^l A_{2l+1}\omega^{2(l-m)}$$

je $(-1)^m A_{2m+1}$. Funkcija koja je njime pretstavljena je neprekidna u ovoj tački.

m u izvedenim relacijama može biti svaki ceo pozitivan broj, a u prvoj i nula. Za $m = 0$ prva relacija postaje

$$\int_0^{\infty}\left[R(\omega) - A_0\right]\frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{\pi}{2}A_1.$$

Koeficijente u ovoj relaciji određujemo iz redova koji pretstavljaju realni i imaginarni deo karakteristike za niske učestanosti. Oni su

$$A_0 = R(0) \text{ i } A_1 = X'(0).$$

Stoga se relacija može pisati i u obliku

$$\int_0^{\infty}\frac{R(\omega) - R(0)}{\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2}X'(0),$$

u kome nam kazuje da površina koju zatvara kriva funkcije $\dfrac{R(\omega) - R(0)}{\omega^2}$ sa apscisnom osom zavisi samo od nagiba imaginarnog dela za $\omega = 0$. Ona pretstavlja jednu od teorema koje se dobijaju iz izvedenih relacija.

Za $m=1$ druga relacija izražava drugu teoremu u obliku

$$\int_0^\infty \left[X(\omega) - A_1\omega \right] \frac{d\omega}{\omega^3} = \frac{\pi}{2} A_2 .$$

Ako se koeficijenti izraze odgovarajućim izvodima funkcije $R(\omega)$ i $X(\omega)$, ona se može pisati i u obliku

$$\int_0^\infty \left[X(\omega) - \omega X'(0) \right] \frac{d\omega}{\omega^3} = -\frac{\pi}{2} \frac{R''(0)}{2!} .$$

I za svako drugo m dobija se iz ovih relacija po jedna teorema za karakteristike električnih mreža, kada one zadovoljavaju postavljene uslove.

Iz gore izvedenih relacija moguće je takođe eksplicitno izraziti koeficijente redova koji pretstavljaju realni i imaginarni deo karakteristike za učestanosti manje od najmanjeg modula njenih polova u obliku

$$(-1)^m A_{2m} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[X(\omega) - \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l A_{2l+1} \omega^{2l+1} \right] \frac{d\omega}{\omega^{2m+1}}, \quad (m = 1, 2, 3 \ldots)$$

i

$$(-1)^m A_{2m+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[R(\omega) - \sum_{l=0}^{m} (-1)^l A_{2l} \omega^{2l} \right] \frac{d\omega}{\omega^{2m+2}}, \quad (m = 0, 1, 2 \ldots).$$

Prvim izrazom određeni su koeficijenti reda koji pretstavlja realni deo karakteristike sem koeficijenta $A_0 = R(0)$. On mora biti poznat da bi red bio potpuno određen. Ostali koeficijenti određeni su potpuno imaginarnim delom karakteristike na osi realnih učestanosti, jer su njime određeni i koeficijenti koji se pod integralom ovoga izraza javljaju. Ovi poslednji koeficijenti se obično izražavaju izvodima funkcije $X(\omega)$.

Drugim pak izrazom određeni su svi koeficijenti reda koji pretstavlja imaginarni deo karakteristike za niske učestanosti pomoću njenog realnog dela na osi realnih učestanosti.

Stoga se ovi redovi, nakon promene oznake za promenljivu u integralima, mogu pisati u obliku

$$R(\omega) = A_0 - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_0^\infty \left[X(\lambda) - \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l A_{2l+1} \lambda^{2l+1} \right] \frac{d\lambda}{\lambda^{2m+1}} \right\} \omega^{2m}$$

i

$$X(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^\infty \left[R(\lambda) - \sum_{l=0}^{m} (-1)^l A_{2l} \lambda^{2l} \right] \frac{d\lambda}{\lambda^{2m+2}} \right\} \omega^{2m+1}$$

LITERATURA

1. *Bayard M.:* Relations entre les parties réelles et imaginaires des impédances et détermination des impédances en fonction de l'une des parties.— Rev. Gén. Elec. May 1935.

2. *Bode H. W.:* Relations Between Attenuation and Phase in Feedback Amplifier Design.— BSTJ, July 1940.

3. *Bode H. W.:* Network Analysis and Feedback Amplifier Design.— Van Nostrand, New York 1945.

4. *Brune O.:* Synthesis of a Finite Two-Terminal Network Whose Driving Point Impedance is a Prescribed Function of Frequency.— J. Math. Phys. August 1931.

5. *Cauer W.:* Das Poissonsche Integral und seine Andwendungen auf die Theorie der linearen Wechselstromschaltungen (Netzwerke).— Elek. Nachr. Tech. Jan. 1940.

6. *Darlington S.:* Synthesis of Reactance Four-Poles which Produce Prescribed Insertion Loss Characteristics.— J. Math. Phys. Sept. 1939.

7. *Goldman S.:* Transformation Calculus and Electrical Transients.— Prentice Hall, New York, 1954.

8. *Guillemin E.:* Network Synthesis.— Wiley, New York, 1957.

9. *Murakami T. and Corrington M. S.:* Relations Between Amplitude and Phase in Electrical Networks.— RCA, Dec. 1948.

10. *Seely S., LePage W. and Balabanian N.:* The role of Analytic Continuation in Network Synthesis.— Nat. Electron. Conf. Proc. Chicago 1953.

11. *Seshu S. and Balabanian N.:* Linear Network Synthesis.— Wiley, New York, 1959.

12. *Tuttle F. D.:* Network Synthesis.— Wiley, New York, 1958.

SUMMARY

INTEGRAL THEOREMS OF ELECTRIC NETWORK CHARACTERISTICS

Radoslav Horvat

This paper treats the problem of integral relations between real and imaginary part of the network characteristics which are analytic in the right half plane of complex frequency and without poles at the origin and infinity. Using Cauchy's theorem and convenient functions the author obtained a series of theorems between these parts. Complex functions must satisfy these relations if they represent network characteristics of the above mentioned conditions.

In the paper the author is dealing with the driving-point impedance function as the network characteristic. The derived relations are valid for any other network characteristics which have the same behavior as the driving-point impedance in the complex frequency plane.

The author derived first the well-known reactance and resistance integral theorems. Than applying the Cauchy's theorem and taking as the integrand the function

$$\breve{G}(\breve{p}) = \breve{p}^n \left[Z(\breve{p}) - \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{\breve{p}^k} \right],$$

he got for each positive integer n an integral theorem between real and imaginary part of the network characteristic. The sum in the expression for the function $G(\breve{p})$ represents the first $n+1$ members of Laurent series of the characteristic $\breve{Z}(\breve{p})$ and that for the region outside the circle centered on the origin, in which are all the poles of the characteristic. The same relations give also the coefficients for the potential series of one of the parts of the network characteristic for the frequencies higher than the maximum value of the modulus of its poles, when the other is known on the real frequency axis. The only exception is the constant member of the real part series, which cannot be determined in this way.

At the end of the paper the author shows that the potential series coefficients of real and imaginary part of the network characteristic for frequencies lower than the minimum value of the modulus of its poles are represented by the integrals determined in the first case by the imaginary and in the second one by the real part of the characteristic on the real frequency axis. One can get these expressions applying Cauchy's theorem on the function

$$\breve{H}(\breve{p}) = \left[\breve{Z}(\breve{p}) - \sum_{k=0}^{n} A_k \breve{p}^k \right] \cdot \frac{1}{\breve{p}^{n+2}} \cdot$$

The sum in the bracket represents the first $n+1$ members of Maclaurin series of the network characteristic.

Tehnički urednik
ŽIVORAD VUJIĆ

Slagač
ĐORĐE BOŠKOVIĆ

Tiraž: 600 primeraka

Štampanje završeno novembra 1959 god. u Beogradskom grafičkom zavodu — Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17.