PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 27 (1959)

COMPLÉMENTS AU TRAITÉ DE KAMKE

Note VI

D. S. Mitrinović

1. Tout récemment a paru la sixième édition du Traité de *Kamke*: Differentialgleichungen-Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. I, Leipzig, 1959, 666 Seiten.

La première édition de ce Traité a paru en 1942.

Comme l'on voit de la préface à cette édition, le Traité est un peu amélioré dans la partie intitulée: Einzel-Differentialgleichungen. Cette partie a déjà attiré l'attention des mathématiciens, physiciens et ingénieurs, étant le plus complet parmi les recueils existants d'équations différentielles.

Afin qu'une nouvelle édition du Traité en question soit encore plus complète, nous indiquons, dans cette petite Note, quelques équations différentielles qui comblent certaines lacunes dans le Recueil d'équations différentielles de *Kamke*.

C'est, en fait, la sixième Note sous le titre indiqué plus haut. Les cinq premières sont mentionnées à la fin de cette Note {*voir* [1]}.

2. L'équation différentielle 1.257

$$x\,(xy + x^4 - 1)\,y' = y\,(xy - x^4 - 1), \tag{1}$$

dont l'intégration sous forme finie a indiqué *S. Sispánov* (Boletin matematico, Buenos Aires, 11 (1938), p. 200—206) peut être généralisée.

Considérons l'équation

$$x\,(Ax^4 + Bxy + C)\,dy = y\,(Dx^4 + Exy + F)\,dx \tag{2}$$

$$(A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F \text{ constantes quelconques}),$$

qui contient (1) comme cas particuler.

Posons

$$x^4 = u, \quad xy = v, \tag{3}$$

d'où

$$4\,x^3\,dx = dy, \quad x\,dy + y\,dx = dv,$$

ce qui donne

$$4\,uy\,dx = v\,du, \quad x\,dy = dv - y\,dx. \tag{4}$$

D'après (3) et (4) l'équation (2) prend la forme

(5) $$\frac{dy}{dv}=\frac{4\,u\,(Au+Bv+C)}{v\,[(A+D)\,u+(B+E)\,v+C+F]}.$$

Si l'on a $D=-A$, l'équation (5) est une équation de *Bernoulli*. Par suite, l'équation (2) s'intègre par quadratures si $D=-A$.
Pour l'équation (1) la condition $D=-A$ est satisfaite.
S. Sispánov a obtenu sa solution par une voie fort compliquée.
On démontre que l'équation plus générale

(6) $$x\,(Ax^k+Bxy+C)\,dy=y\,(Dx^k+Exy+F)\,dx \qquad (k=\text{const}),$$

par le changement des variables

$$x^k=u, \quad xy=v$$

se transforme en

(7) $$\frac{du}{dv}=\frac{ku\,(Au+Bv+C)}{v\,[(A+D)\,u+(B+E)\,v+C+F]}.$$

Dans le cas où $D=-A$, l'équation (7) est une équation de *Bernoulli* et l'équation (6) est intégrable par quadratures toutes les fois où $D=-A$.

Dans la Note I de nos Compléments au Traité de Kamke est considérée une équation plus générale que (6).

3. Pour l'équation différentielle 1.252

(1) $$(x^2y-1)\,y'-(xy^2-1)=0$$

est indiqué un procédé d'intégration dû à *Lampariello*.

Si l'on observe que l'expression

$$(x^2y-1)\,dy-(xy^2-1)\,dx$$

a, comme facteur intégrant, la fonction $(x-y)^{-4}$, on a une autre voie pour trouver la solution de l'équation (1).

4. L'expression suivante

$$x\,(2y+x-1)\,dy-y(y+2x+1)\,dx$$

a, comme facteur intégrant, la fonction $(y-x+1)^{-4}$, tandis que l'expression

$$x\,(2y-x-1)\,dy+y\,(2x-y-1)\,dx$$

a, comme facteur intégrant, la fonction $(y+x+1)^{-4}$.

Par suite, les équations 1.243 et 1.244 sont intégrables.

Dans l'article [2] sont étudiés les points singuliers de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cdot\frac{a_1\,x+b_1y+c_1}{a_2\,x+b_2y+c_2} \quad (a_k,\ b_k,\ c_k \text{ constantes}),$$

qui englobe les équations 1.243 et 1.244 comme des cas particuliers.

5. L'équation différentielle 2.411

$$(e^x + 1)\, y'' = y$$

peut être généralisée.

En effet, l'équation

$$\left(ae^{bx} + \frac{1}{b^2}\right) y'' = y \quad (a,\ b \text{ constantes quelconques})$$

s'intègre, car son intégrale particulière est

$$y_1 = e^{-bx} + ab^2.$$

6. Considérons l'équation différentielle

$$y'' + (ax^2 + bx + c)\, y' + (Ax + B)\, y = 0 \quad (a,\ b,\ c,\ A,\ B \text{ constantes}). \tag{1}$$

Si l'on effectue la dérivation suivante

$$[y'' + (ax^2 + bx + c)\, y' + (Ax + B)\, y]^{(n)},$$

l'équation (1) devient

$$y^{(n+2)} + (ax^2 + bx + c)\, y^{(n+1)} + [(2\,an + A)\, x + (bn + B)]\, y^{(n)} + [n\,(n-1)\, a + nA]\, y^{(n-1)} = 0. \tag{2}$$

Si $-A/a\,(a \neq 0)$ est le zéro ou un nombre naturel et si l'on pose

$$n = 1 - \frac{A}{a}, \tag{3}$$

l'équation (2) prend la forme suivante

$$z'' + (ax^2 + bx + c)\, z' + \left[(2a - A)\, x + b\left(1 - \frac{A}{a}\right) + B \right] z = 0 \tag{4}$$

avec $y^{(n)} = z$.

Les équations (1) et (4) sont de même type.

Le même procédé s'applique si $(A/a) - 2$ présente un nombre naturel.

Dans le Recueil de *Kamke* on ne trouve qu'une seule équation à laquelle peut être appliqué le procédé indiqué. C'est l'équation 2.56

$$y'' - x^2 y' + xy = 0. \tag{5}$$

Étant donné que $-A/a\ (=1)$ est nombre naturel, à l'équation (5) correspond l'équation (4) suivante

$$z'' - x^2 z' - 3\, xz = 0. \tag{6}$$

Une solution particulière de cette équation est $x \exp\left(\frac{1}{3} x^3\right)$.

À l'équation (6) ne correspond pas une équation de la forme (4), car ici $-A/a\ (= -3)$ n'est pas un nombre naturel.

Comme point de départ on peut prendre aussi l'équation

$$y'' + ax^2 y' - axy = 0 \quad \text{(une solution particulière } u_1 = x\text{)}$$

au lieu de (5). Alors l'équation (6) a la forme

$$z'' + ax^2 z' + 3\,axz = 0.$$

Le procédé indiqué peut être généralisé.

7. L'équation différentielle

(1) $$(xy' - ay)\,y'' + 4\,y'^2 = 0$$

est le cas particulier de l'équation différentielle

(2) $$(xy' - ay)\,y'' + b\,y'^2 = 0 \quad (a,b \text{ constantes}).$$

Si l'on pose $y = \exp \int u dx$, l'équation (2) devient

(3) $$(xu - a)\,(u' + u^2) + bu^2 = 0.$$

Par le changement

$$u = \eta\, e^{-\xi}, \qquad x = e^{\xi},$$

l'équation (3) prend la forme suivante

$$(\eta - a)\left(\frac{d\eta}{d\xi} - \eta + \eta^2\right) + b\eta^2 = 0,$$

d'où il s'ensuit

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta - \eta^2 - \frac{b\eta^2}{\eta - a}.$$

Par suite, l'équation (2) s'intègre à l'aide des quadratures.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. MITRINOVITCH:

Compléments au Traité de Kamke.
Note I *(Jahresbericht der Deutschen Mathematiker—Vereinigung*, Bd. 58, 1956, Abt. 2., S. 58—60);
Note II *(Bulletin de la Societé des mathématiciens et physiciens de Serbie*, t. VII, 1955, p. 161—164);
Note III *(Bollettino della Unione matematica italiana*, serie III, anno XI, 1956, pp. 168—171);
Note IV *(Glasnik matematičko-fizički i astronomski*, t. 11, 1956, p. 7—10).
Note V *(Publikacije Elektrotehničkog fakulteta*, serija: *Matematika i fizika*, Beograd, № 11 (1957), p. 1—10).

[2] C. W. JONES:

On reducible non-linear differential equations occurring in mechanics (Proc. Roy Soc., A. 217, 1853, № 1130, p. 327—343).