PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 26 (1959)

UNE PROPOSITION SUR LES DÉTERMINANTS CIRCULANTS D'ORDRE PAIR

par

S. V. Pavlović

(Belgrade)

M. Goormaghtigh[1] a indiqué sans démonstration le résultat suivant:

$$\begin{vmatrix} p & p+2q & p+q & q \\ q & p & p+2q & p+q \\ p+q & q & p & p+2q \\ p+2q & p+q & q & p \end{vmatrix} = (3p+4q)\cdot(2q-p)\cdot\begin{vmatrix} p & p+q \\ p+q & q \end{vmatrix}$$

Nous montrerons qu'on a, plus généralement: (voir le déterminant 1)

c'est-à-dire que chaque circulant d'ordre $2n$ peut être écrit comme le produit d'un déterminant d'ordre n et d'un déterminant d'ordre n-1, leurs éléments étant des fonctions linéaires des éléments de circulant.

En effet, en ajoutant les éléments de toutes les lignes aux éléments correspondants de la première ligne, la valeur du déterminant (1) ne change pas.

Le déterminant obtenu, ayant comme les éléments de la première ligne la même valeur $\sum_{i=1}^{2n} a_i$, on peut la mettre devant le déterminant comme facteur.

En retranchant les éléments de la première colonne des éléments correspondants des autres colonnes, on obtient, dans la première ligne tous les éléments nuls excepté le premier.

Si l'on développe ce déterminant suivant les éléments de la première ligne on obtient un déterminant d'ordre $2n$-1: (voir le déterminant 2)

Si l'on ajoute les éléments de la $n+1$-ière ligne de ce déterminant aux éléments correspondants de la première ligne on obtient un zéro dans la n-ième place.

[1] Scripta Mathematica, Vol. XXI, 1955; Nos. 2—3, p. 203.
La suggestion pour ce travail nous a été donné par „Zbornik matematičkih problema" de Dragoslav Mitrinović qui contient le problème de M. R. Goormaghtigh résolu par Kovina Milošević.

Remarquons maintenant que, dans la première ligne le premier élément est égal au $n+1$-ier, deuxième au $n+2$-ième, ..., n-1-ier au $2n$-1-ier. Retranchant la première colonne de la $n+1$-ière, deuxième de la $n+2$-ième, ..., n-1-ière de la $2n$-1-ière, on obtient, dans la première ligne les zéros, à droite du n-ième élément, c'est-à-dire: (voir le déterminant 3)

Si l'on ajoute les éléments de la $n+2$-ième ligne aux éléments correspondants de la deuxième ligne, les éléments de la $n+3$-ième ligne aux éléments correspondants de la 3-ième ligne, ..., et les éléments de la $2n$-1-ière ligne aux correspondants de la n-1-ière ligne, on obtient le déterminant: (voir le déterminant 4)

Il en résulte notre assertion (1).

REZIME

O JEDNOM STAVU ZA CIRKULANTE PARNOG REDA

Slobodan V. Pavlović

U ovom radu se pokazuje da je svaka cirkulanta reda $2n$ (videti déterminant 1) uvek deljiva jednom determinantom reda $n-1$ i jednom determinantom reda n. Za ove determinante je karakteristično da su svi njihovi elementi linearne funkcije elemenata date cirkulante.

Stav je dokazan na taj način što se cirkulanta (déterminant 1), operacijama koje ne menjaju njenu vrednost, dovela na oblik (déterminant 4). Pošto sad ova determinanta u gornjem desnom uglu ima samo nule, to se može primeniti Laplace-ova teorema o razlaganju takve determinante na faktore. Odatle neposredno sleduje tačnost stava.

(déterminant 1)

$$
\begin{vmatrix}
a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & a_{n-1}, & a_n, & a_{n+1}, & a_{n+2}, & a_{n+3}, & \cdots & a_{2n-1}, & a_{2n} \\
a_{2n}, & a_1, & a_2, & & a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n, & a_{n+1}, & a_{n+2}, & & a_{2n-2}, & a_{2n-1} \\
\vdots & & & & & & & & & & & \\
a_{n+2}, & a_{n+3}, & a_{n+4}, & & a_{2n}, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & & a_n, & a_{n+1}, \\
a_{n+1}, & a_{n+2}, & a_{n+3}, & & a_{2n-1}, & a_{2n}, & a_1, & a_2, & a_3, & & a_{n-1}, & a_n, \\
a_n, & a_{n+1}, & a_{n+2}, & & a_{2n-2}, & a_{2n-1}, & a_{2n}, & a_1, & a_2, & & a_{n-2}, & a_{n-1}, \\
a_{n-1}, & a_n, & a_{n+1}, & & a_{2n-3}, & a_{2n-2}, & a_{2n-1}, & a_{2n}, & a_1, & & a_{n-3}, & a_{n-2}, \\
\vdots & & & & & & & & & & & \\
a_3, & a_4, & a_5, & & a_{n+1}, & a_{n+2}, & a_{n+3}, & a_{n+4}, & a_{n+5}, & & a_1, & a_2, \\
a_2, & a_3, & a_4, & & a_n, & a_{n+1}, & a_{n+2}, & a_{n+3}, & a_{n+4}, & & a_{2n}, & a_1,
\end{vmatrix}
$$

$$
=\left(\sum_{i=1}^{2n} a_i\right)\cdot
\begin{vmatrix}
a_1+a_{n+1}-a_n-a_{2n}, & a_2+a_{n+2}-a_n-a_{2n}, & \cdots & a_{n-2}+a_{2n-2}-a_n-a_{2n}, & a_{n-1}+a_{2n-1}-a_n-a_{2n}, \\
a_{2n}+a_n-a_{n-1}-a_{2n-1}, & a_1+a_{n+1}-a_{n-1}-a_{2n-1}, & & a_{n-3}+a_{2n-3}-a_{n-1}-a_{2n-1}, & a_{n-2}+a_{2n-2}-a_{n-1}-a_{2n-1} \\
\vdots & & & & \\
a_{n+4}+a_4-a_3-a_{n+3}, & a_{n+5}+a_5-a_3-a_{n+3}, & & a_1+a_{n-1}-a_3-a_{n+3}, & a_2+a_{n+2}-a_3-a_{n+3}, \\
a_{n+3}+a_3-a_2-a_{n+2}, & a_{n+4}+a_4-a_2-a_{n+2}, & & a_{2n}+a_n-a_2-a_{n+2}, & a_1+a_{n+1}-a_2-a_{n+2},
\end{vmatrix}
$$

$$
\times
\begin{vmatrix}
a_1-a_{n+1}, & a_2-a_{n+2}, & a_3-a_{n+3}, & \cdots & a_{n-1}-a_{2n-1}, & a_n-a_{2n} \\
a_{2n}-a_n, & a_1-a_{n+1}, & a_2-a_{n+2}, & & a_{n-2}-a_{2n-2}, & a_{n-1}-a_{2n-1} \\
a_{2n-1}-a_{n-1}, & a_{2n}-a_n, & a_1-a_{n+1}, & & a_{n-3}-a_{2n-3}, & a_{n-2}-a_{2n-2} \\
\vdots & & & & & \\
a_{n+3}-a_3, & a_{n+4}-a_4, & a_{n+5}-a_5, & & a_1-a_{n+1}, & a_2-a_{n+2} \\
a_{n+2}-a_2, & a_{n+3}-a_3, & a_{n+4}-a_4, & & a_{2n}-a_n, & a_1-a_{n+1}
\end{vmatrix}
$$

(déterminant 2)

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} a_i\right) \cdot \begin{vmatrix}
a_1 - a_{2n}, & a_2 - a_{2n}, & \cdots & a_{n-2} - a_{2n}, & a_{n-1} - a_{2n}, & a_n - a_{2n}, & a_{n+1} - a_{2n}, & a_{n+2} - a_{2n}, & \cdots & a_{2n-2} - a_{2n}, & a_{2n-1} - a_{2n} \\
a_{2n} - a_{2n-1}, & a_1 - a_{2n-1}, & & a_{n-3} - a_{2n-1}, & a_{n-2} - a_{2n-1}, & a_{n-1} - a_{2n-1}, & a_n - a_{2n-1}, & a_{n+1} - a_{2n-1}, & & a_{2n-3} - a_{2n-1}, & a_{2n-2} - a_{2n-1} \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
a_{n+3} - a_{n+2}, & a_{n+4} - a_{n+2}, & & a_{2n} - a_{n+2}, & a_1 - a_{n+2}, & a_2 - a_{n+2}, & a_3 - a_{n+2} & a_4 - a_{n+2}, & & a_n - a_{n+2}, & a_{n+1} - a_{n+2}, \\
a_{n+2} - a_{n+1}, & a_{n+3} - a_{n+1}, & & a_{2n-1} - a_{n+1}, & a_{2n} - a_{n+1}, & a_1 - a_{n+1}, & a_2 - a_{n+1}, & a_3 - a_{n+1}, & & a_{n-1} - a_{n+1}, & a_n - a_{n+1}, \\
a_{n+1} - a_n, & a_{n+2} - a_n, & & a_{2n-2} - a_n, & a_{2n-1} - a_n, & a_{2n} - a_n, & a_1 - a_n, & a_2 - a_n, & & a_{n-2} - a_n, & a_{n-1} - a_n, \\
a_n - a_{n+1}, & a_{n+1} - a_{n-1}, & & a_{2n-3} - a_{n-1}, & a_{2n-2} - a_{n-1}, & a_{2n-1} - a_{n-1}, & a_{2n} - a_{n-1}, & a_1 - a_{n-1}, & & a_{n-3} - a_{n-1}, & a_{n-2} - a_{n-1}, \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
a_4 - a_3, & a_5 - a_3, & & a_{n+1} - a_3, & a_{n+2} - a_3 & a_{n+3} - a_3, & a_{n+4} - a_3, & a_{n+5} - a_3, & & a_1 - a_3, & a_2 - a_3 \\
a_3 - a_2, & a_4 - a_2, & & a_n - a_2, & a_{n+1} - a_2, & a_{n+2} - a_2, & a_{n+3} - a_2, & a_{n+4} - a_2, & & a_{2n} - a_2, & a_1 - a_2
\end{vmatrix}$$

(déterminant 3)

$$
\left(\sum_{i=1}^{2n} a_i\right) \cdot \left| \begin{array}{lll}
a_1+a_{n+1}-a_n-a_{2n}, & a_2+a_{n+2}-a_n-a_{2n}, \quad \cdots & a_{n-2}+a_{2n-2}-a_n-a_{2n}, \\
a_{2n}-a_{2n-1}, & a_1-a_{2n-1} & a_{n-3}-a_{2n-1}, \\
\vdots & & \\
a_{n+3}-a_{n+2}, & a_{n+4}-a_{n+2}, & a_{2n}-a_{n+2}, \\
a_{n+2}-a_{n+1}, & a_{n+3}-a_{n+1}, & a_{2n-1}-a_{n+1}, \\
a_{n+1}-a_n, & a_{n+2}-a_n, & a_{2n-2}-a_n, \\
a_n-a_{n-1}, & a_{n+1}-a_{n-1} & a_{2n-3}-a_{n-1}, \\
\vdots & & \\
a_4-a_3, & a_5-a_3, & a_{n+1}-a_3, \\
a_3-a_2, & a_4-a_2 & a_n-a_2,
\end{array} \right.
$$

$$
\left. \begin{array}{llllll}
a_{n-1}+a_{2n-1}-a_n-a_{2n}, & 0 & 0 & 0 \quad \cdots & 0 & 0 \\
a_{n-2}-a_{2n-1}, & a_{n-1}-a_{2n-1}, & a_n-a_{2n}, & a_{n+1}-a_1, & a_{2n-3}-a_{n-3}, & a_{2n-2}-a_{n-2} \\
 & & & & & \\
a_1-a_{n+2}, & a_2-a_{n+2}, & a_3-a_{n+3}, & a_4-a_{n+4}, & a_n-a_{2n}, & a_{n+1}-a_1, \\
a_{2n}-a_{n+1}, & a_1-a_{n+1}, & a_2-a_{n+2}, & a_3-a_{n+3}, & a_{n-1}-a_{2n-1}, & a_n-a_{2n}, \\
a_{2n-1}-a_n, & a_{2n}-a_n, & a_1-a_{n+1}, & a_2-a_{n+2}, & a_{n-2}-a_{2n-2}, & a_{n-1}-a_{2n-1}, \\
a_{2n-2}-a_{n-1}, & a_{2n-1}-a_{n-1}, & a_{2n}-a_n, & a_1-a_{n+1}, & a_{n-3}-a_{2n-3}, & a_{n-2}-a_{2n-2}, \\
 & & & & & \\
a_{n+2}-a_3, & a_{n+3}-a_3, & a_{n+4}-a_4, & a_{n+5}-a_5, & a_1-a_{n+1}, & a_2-a_{n+2}, \\
a_{n+1}-a_2, & a_{n+2}-a_2, & a_{n+3}-a_3, & a_{n+4}-a_4, & a_{2n}-a_n, & a_1-a_{n+1},
\end{array} \right|
$$

(déterminant 4)

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} a_i\right) \cdot \left| \begin{array}{llll} a_1 + a_{n+1} - a_n - a_{2n}, & a_2 + a_{n+2} - a_n - a_{2n}, & \cdots & a_{n-2} + a_{2n-2} - a_n - a_{2n}, \\ a_{2n} + a_n - a_{n-1} - a_{2n-1}, & a_1 + a_{n+1} - a_{n-1} - a_{2n-1}, & & a_{n-3} + a_{2n-3} - a_{n-1} - a_{2n-1}, \\ \vdots & & & \\ a_{n+3} + a_3 - a_2 - a_{n+2}, & a_{n+4} + a_4 - a_2 - a_{n+2}, & & a_{2n} + a_n - a_2 - a_{n+2}, \\ a_{n+2} - a_{n+1}, & a_{n+3} - a_{n+1}, & & a_{2n-1} - a_{n+1}, \\ a_{n+1} - a_n, & a_{n+2} - a_n, & & a_{2n-2} - a_n, \\ a_n - a_{n-1}, & a_{n+1} - a_{n-1}, & & a_{2n-3} - a_{n-1}, \\ \vdots & & & \\ a_4 - a_3, & a_5 - a_3, & & a_{n+1} - a_3, \\ a_3 - a_2, & a_4 - a_2, & & a_n - a_2, \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{llllll} a_{n-1} + a_{2n-1} - a_n - a_{2n}, & 0 & 0 & 0 \quad \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-2} + a_{2n-2} - a_{n-1} - a_{2n-1}, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ a_1 + a_{n+1} - a_2 - a_{n+2}, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2n} - a_{n+1}, & a_1 - a_{n+1}, & a_2 - a_{n+2}, & a_3 - a_{n+3}, & a_{n-1} - a_{2n-1}, & a_n - a_{2n}, \\ a_{2n-1} - a_n, & a_{2n} - a_n, & a_1 - a_{n+1}, & a_2 - a_{n+2}, & a_{n-2} - a_{2n-2}, & a_{n-1} - a_{2n-1}, \\ a_{2n-2} - a_{n-1}, & a_{2n-1} - a_{n-1}, & a_{2n} - a_n, & a_1 - a_{n+1}, & a_{n-3} - a_{2n-3}, & a_{n-2} - a_{2n-2}, \\ & & & & & \\ a_{n+2} - a_3, & a_{n+3} - a_3, & a_{n+4} - a_4, & a_{n+5} - a_5, & a_1 - a_{n+1}, & a_2 - a_{n+2}, \\ a_{n+1} - a_2, & a_{n+2} - a_2, & a_{n+3} - a_3, & a_{n+4} - a_4 & a_{2n} - a_n, & a_1 - a_{n+1}, \end{array} \right|$$