PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 25 (1959)

O MACMILLAN-OVOJ MODIFIKACIJI GAUSS—CHIÒ-OVOG POSTUPKA ZA IZRAČUNAVANJE DETERMINANATA

Dragoslav S. Mitrinović

(Primljeno 3-III-1959)

1. Pođimo od poznatog identiteta { videti **[1]** i **[2]** }

$$(1)\qquad (a_{11}\, a_{22}\, a_{33}) \equiv \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} (a_{11}\, a_{22}) & (a_{11}\, a_{23}) \\ (a_{11}\, a_{32}) & (a_{11}\, a_{33}) \end{vmatrix}, \quad a_{11} \neq 0;$$

gde je

$$(a_{pq}\, a_{rs}) \equiv \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} \\ a_{rq} & a_{rs} \end{vmatrix}, \quad (a_{pq}\, a_{rs}\, a_{uv}) \equiv \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} & a_{pv} \\ a_{rq} & a_{rs} & a_{rv} \\ a_{uq} & a_{us} & a_{uv} \end{vmatrix}.$$

Pokazaćemo da važi takođe formula

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{a_{22}} \begin{vmatrix} (a_{11}\, a_{22}) & (a_{12}\, a_{23}) \\ (a_{21}\, a_{32}) & (a_{22}\, a_{33}) \end{vmatrix}, \quad a_{22} \neq 0.$$

Determinanta $(a_{11}\, a_{22}\, a_{33})$ jedno za drugim dobija oblike

$$(a_{11}\, a_{22}\, a_{33}) \equiv - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (a_{11}\, a_{22}\, a_{33}) \equiv \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Primeni li se formula (1) na poslednju determinantu, biće

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{a_{22}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{22}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix}, \quad a_{22} \neq 0,$$

što je i trebalo pokazati.

Izračunajmo po formuli (2) determinantu

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Postupak je sledeći:

1° Izračunavaju se svi minori II reda čiji elementi pripadaju dvema susednim vrstama i dvema susednim kolonama. Vrednosti ovih minora otštampani su crno u centru svakog od navedenih minora u shemi

$$\begin{bmatrix} 5 & & 7 & & -4 \\ & \mathbf{16} & & \mathbf{17} & \\ 2 & & 6 & & -1 \\ & \mathbf{26} & & \mathbf{46} & \\ -3 & & 4 & & 7 \end{bmatrix};$$

2° Izdvajaju se zatim svi brojevi otštampani crno kao i onaj broj koji stoji u centru crnih brojeva (u ovom slučaju broj 6 je a_{22})

$$\begin{bmatrix} 16 & & 17 \\ & \mathbf{6} & \\ 26 & & 46 \end{bmatrix};$$

3° Izračunava se determinanta

$$\begin{vmatrix} 16 & 17 \\ 26 & 46 \end{vmatrix}$$

i deli brojem 6 koji se nalazi gore u centru.

Dakle, vrednost date determinante je

$$\begin{vmatrix} 16 & 17 \\ 26 & 46 \end{vmatrix} : 6 = 49.$$

U tome se sastoji *MacMillan*-ov postupak {videti **[3]**}.

2. Za determinantu IV reda $(a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44})$ važi formula {videti [1] i [2]}:

$$(3)\qquad (a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}) = \frac{1}{a_{11}^2}\begin{vmatrix} (a_{11}\,a_{22}) & (a_{11}\,a_{23}) & (a_{11}\,a_{24}) \\ (a_{11}\,a_{32}) & (a_{11}\,a_{33}) & (a_{11}\,a_{34}) \\ (a_{11}\,a_{42}) & (a_{11}\,a_{43}) & (a_{11}\,a_{44}) \end{vmatrix}, \quad a_{11} \neq 0.$$

Ako je $(a_{11}\,a_{22}) \neq 0$, prema formuli (1), biće

$$(a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}) = \frac{1}{a_{11}^2\,(a_{11}\,a_{22})}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} (a_{11}\,a_{22}) & (a_{11}\,a_{23}) \\ (a_{11}\,a_{32}) & (a_{11}\,a_{33}) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} (a_{11}\,a_{22}) & (a_{11}\,a_{24}) \\ (a_{11}\,a_{32}) & (a_{11}\,a_{34}) \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} (a_{11}\,a_{22}) & (a_{11}\,a_{23}) \\ (a_{11}\,a_{42}) & (a_{11}\,a_{43}) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} (a_{11}\,a_{22}) & (a_{11}\,a_{24}) \\ (a_{11}\,a_{42}) & (a_{11}\,a_{44}) \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}^2\,(a_{11}\,a_{22})}\begin{vmatrix} a_{11}\,(a_{11}\,a_{22}\,a_{33}) & a_{11}\,(a_{11}\,a_{22}\,a_{34}) \\ a_{11}\,(a_{11}\,a_{22}\,a_{43}) & a_{11}\,(a_{11}\,a_{22}\,a_{44}) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(a_{11}\,a_{22})}\begin{vmatrix} (a_{11}\,a_{22}\,a_{33}) & (a_{11}\,a_{22}\,a_{34}) \\ (a_{11}\,a_{22}\,a_{43}) & (a_{11}\,a_{22}\,a_{44}) \end{vmatrix}.$$

Posmatrana determinanta IV reda može se napisati u obliku

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{34} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{14} \\ a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Na osnovu poslednje formule ova determinanta, tj. $(a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44})$, dobija oblik

$$\frac{1}{(a_{22}\,a_{33})}\begin{vmatrix} (a_{22}\,a_{33}\,a_{11}) & (a_{22}\,a_{33}\,a_{14}) \\ (a_{22}\,a_{33}\,a_{41}) & (a_{22}\,a_{33}\,a_{44}) \end{vmatrix}$$

ako je $(a_{22}\,a_{33}) \neq 0$.

Definitivno imamo formulu

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_{22}\,a_{33})}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Izračunavanje determinante IV reda po formuli (4), tj. po *MacMillan*-ovoj shemi, ilustrovaćemo na primeru

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

1° Prvo ćemo izračunati sve minore II reda čiji elementi pripadaju dvema susednim vrstama i dvema susednim kolonama[1] i te vrednosti ispisati u centru odgovarajućeg minora. Za posmatrani slučaj dobija se

$$\begin{vmatrix} 2 & & -2 & & 0 & & 0 \\ & \mathbf{2} & & \mathbf{-6} & & \mathbf{0} & \\ 4 & & -3 & & 3 & & 1 \\ & \mathbf{8} & & \mathbf{-18} & & \mathbf{-22} & \\ 0 & & 2 & & 4 & & -6 \\ & \mathbf{-10} & & \mathbf{24} & & \mathbf{-12} & \\ 5 & & -7 & & -2 & & 0 \end{vmatrix}.$$

2° Dalje će igrati ulogu samo unutrašnji elementi

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & & \mathbf{-6} & & \mathbf{0} \\ & -3 & & 3 & \\ \mathbf{8} & & \mathbf{-18} & & \mathbf{-22} \\ & 2 & & 4 & \\ \mathbf{-10} & & \mathbf{24} & & \mathbf{-12} \end{vmatrix}.$$

3° Ako sada izračunamo odgovarajuće minore II reda determinante (sastavljene od elemenata otštampanih crno) i svaku od tih vrednosti podelimo odgovarajućim brojem koji se nalazi u centru minora, dobijamo

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-4} & & \mathbf{44} \\ & -18 & \\ \mathbf{6} & & \mathbf{186} \end{vmatrix}.$$

4° Ako izračunamo determinantu II reda koju obrazuju elementi otštampani crno i podelimo je brojem koji se nalazi u centru ove determinante, dobija se 56.

To je vrednost date determinante IV reda.

3. Polazeći od formule

$$(5) \qquad (a_{11}\,a_{22}\dots a_{nn}) \equiv \frac{\begin{vmatrix} (a_{11}\,a_{22}\dots a_{n-1,\,n-1}) & (a_{12}\,a_{23}\dots a_{n-1,\,n}) \\ (a_{21}\,a_{32}\dots a_{n,\,n-1}) & (a_{22}\,a_{33}\dots a_{nn}) \end{vmatrix}}{(a_{22}\,a_{33}\dots a_{n-1,\,n-1})},$$

gde je $(a_{22}\,a_{33}\dots a_{n-1,\,n-1}) \neq 0$, dobićemo shemu za izračunavanje determinanata reda n.

Formula (5) dokazuje se na sličan način kao i formula (4).

---

[1] U daljem izlaganju pod minorom podrazumevaćemo samo minore sa navedenom osobinom.

4. Primenimo još *MacMillan*-ov postupak na determinantu V reda

$$D=\begin{vmatrix} 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \end{vmatrix}.$$

Prvi korak sastoji se u izračunavanju elemenata koji stoje u centrima determinanata II reda (ovi su elementi otštampani polucrno):

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 10 & & 18 & & 1 & & 14 & & 22 \\ & \mathbf{48} & & \mathbf{438} & & \mathbf{-342} & & \mathbf{48} & \\ 4 & & 12 & & 25 & & 8 & & 16 \\ & \mathbf{-252} & & \mathbf{78} & & \mathbf{-102} & & \mathbf{88} & \\ 23 & & 6 & & 19 & & 2 & & 15 \\ & \mathbf{13} & & \mathbf{-17} & & \mathbf{373} & & \mathbf{-297} & \\ 17 & & 5 & & 13 & & 21 & & 9 \\ & \mathbf{353} & & \mathbf{-277} & & \mathbf{113} & & \mathbf{-117} & \\ 11 & & 24 & & 7 & & 20 & & 3 \end{array}\right].$$

Izostavimo sada spoljne (okvirne) elemente i izračunajmo sve minore II reda, pa dobijamo

$$\left[\begin{array}{ccccccc} \mathbf{48} & & \mathbf{438} & & \mathbf{-342} & & \mathbf{48} \\ & 114\,120 : 12 & & -18\,000 : 25 & & 25\,200 : 8 & \\ \mathbf{-252} & & \mathbf{78} & & \mathbf{-102} & & \mathbf{88} \\ & 3\,270 : 6 & & 27\,360 : 19 & & 2\,530 : 2 & \\ \mathbf{13} & & \mathbf{-17} & & \mathbf{373} & & \mathbf{-297} \\ & 2\,400 : 5 & & 101\,400 : 13 & & -10\,080 : 21 & \\ \mathbf{353} & & \mathbf{-277} & & \mathbf{113} & & \mathbf{-117} \end{array}\right].$$

Izostavimo opet spoljne elemente, pa dobijamo

$$\left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{9\,510} & & \mathbf{-720} & & \mathbf{-3\,150} \\ & 14\,086\,800 : 78 & & -5\,446\,800 : 102 & \\ \mathbf{545} & & \mathbf{1\,440} & & \mathbf{-1\,265} \\ & 3\,559\,800 : (-17) & & 9\,175\,800 : 373 & \\ \mathbf{480} & & \mathbf{7\,800} & & \mathbf{-480} \end{array}\right].$$

Izostavimo ponovo spoljne elemente, pa imamo

$$\begin{vmatrix} \mathbf{180\,600} & & \mathbf{-53\,400} \\ & -6\,739\,200\,000 : 1\,440 & \\ \mathbf{-209\,400} & & \mathbf{24\,600} \end{vmatrix}.$$

Ako sada izostavimo spoljne elemente, dobijamo

$$-6\,739\,200\,000 : 1\,440 = \mathbf{-4\,680\,000.}$$

To je vrednost date determinante.

5. Za izračunavanje determinante V reda po *MacMillan*-ovom postupku potrebno je izvršiti sledeće operacije:

I. 32 množenja, 16 oduzimanja;

II. 18 množenja, 9 oduzimanja, 9 deljenja;

III. 8 množenja, 4 oduzimanja, 4 deljenja;

IV. 2 množenja, 1 oduzimanje, 1 deljenje.

Ukupno smo izvršili ove operacije:
60 množenja, 30 oduzimanja, 14 deljenja.
Svega 104 operacije.

6. Jedno za drugim dobijamo sledeća kondenzovanja:

$$(6)\qquad (a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}\, a_{55}) \equiv$$

$$\frac{1}{a_{11}^3}\begin{vmatrix} (a_{11}\,a_{22}) & (a_{11}\,a_{23}) & (a_{11}\,a_{24}) & (a_{11}\,a_{25}) \\ (a_{11}\,a_{32}) & (a_{11}\,a_{33}) & (a_{11}\,a_{34}) & (a_{11}\,a_{35}) \\ (a_{11}\,a_{42}) & (a_{11}\,a_{43}) & (a_{11}\,a_{44}) & (a_{11}\,a_{45}) \\ (a_{11}\,a_{52}) & (a_{11}\,a_{53}) & (a_{11}\,a_{54}) & (a_{11}\,a_{55}) \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{a_{11}^3}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{a_{11}^3}\,\frac{1}{b_{11}^2}\begin{vmatrix} (b_{11}\,b_{22}) & (b_{11}\,b_{23}) & (b_{11}\,b_{24}) \\ (b_{11}\,b_{32}) & (b_{11}\,b_{33}) & (b_{11}\,b_{34}) \\ (b_{11}\,b_{42}) & (b_{11}\,b_{43}) & (b_{11}\,b_{44}) \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{a_{11}^3}\,\frac{1}{b_{11}^2}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{a_{11}^3\, b_{11}^2\, c_{11}}\begin{vmatrix} (c_{11}\,c_{22}) & (c_{11}\,c_{23}) \\ (c_{11}\,c_{32}) & (c_{11}\,c_{33}) \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{a_{11}^3\, b_{11}^2\, c_{11}}\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}.$$

Pretpostavlja se da je $a_{11} \cdot b_{11} \cdot c_{11} \neq 0$.

Prilikom prvog kondenzovanja imamo da izvršimo: 32 množenja i 16 oduzimanja.

Prilikom drugog kondenzovanja potrebno je izvršiti:
18 množenja i 9 oduzimanja.

Pri trećem kondenzovanju treba izvršiti:
8 množenja i 4 oduzimanja.

Na kraju imamo da izvršimo:
2 množenja i 1 oduzimanje i da dobijenu vrednost podelimo sa

$$a_{11}^3\, b_{11}^2\, c_{11} = a_{11} \cdot a_{11} \cdot a_{11} \cdot b_{11} \cdot b_{11} \cdot c_{11}.$$

Ovde treba izvršiti pet množenja.

Dakle ukupno:

$$\begin{array}{ll} \text{množenja:} & 32+18+8+2+5=65, \\ \text{oduzimanja:} & \quad\; 16+9+4+1=30, \\ \text{deljenja:} & \qquad\qquad\quad\;\, = \;\;1, \\ \hline & \qquad\qquad\quad\;\, = 96 \text{ operacija.} \end{array}$$

Formula (6) izražava *Gauss-Chiò*-ov postupak za izračunavanje determinanata. Kao što vidimo, za determinante V reda *MacMillan*-ov postupak iziskuje 8 operacija više nego *Gauss-Chiò*-ov postupak.

7. Pod naslovom: „*Новый метод вычисления определителей*“ *А. Л.* (verovatno *А. Лопшиц)* u časopisu: „*Математическое просвещение* (Moskva, 1958, sveska 3, str. 194) doslovno kaže:

„Главное преимущество этого метода перед всеми другими заключается в том, что он состоит в последовательном и однообразном вычислении одной и той же элементарной операции вычисления определителя второго порядка и деление его на заранее подготовленное число — поэтому ошибка при вычислениях становится маловероятной.—Этот метод легко усвоить и запомнить.“

Na kraju ove beleške stoji i ovo:

„Описанный метод весьма экономичен с точки зрения количества выполняемых действий. Существенно и то, что его легко програмировать на автоматических цифровых машинах.“

Navedeni citat bio je povod za ovaj članak u kome smo, između ostalog, pokazali:

1° da je *MacMillan*-ov postupak samo varijanta *Gauss-Chiò*-ovog postupka;

2° da *MacMillan*-ov postupak iziskuje više računskih operacija nego *Gauss-Chiò*-ov postupak.

LITERATURA

[1] A. C. Aitken

Determinats and Matrices, Edinburgh – London, 1949, p. 48 – 49.

[2] D. S. Mitrinović

Zbornik matematičkih problema, t. II, Beograd, 1958, str. 12 – 13.

[3] R. H. MacMillan

Contractants: A new method for the numerical evaluation of determinants (Journal of the Royal Aeronautical Society, vol. 59, 1955, p. 772 – 773).

[4] А. Л.

Новый метод вычисления определителей (Математическое просвещение, Moskva, 1958, № 3. str. 194).

RÉSUMÉ

SUR UNE MODIFICATION DE MACMILLAN DU PROCÉDÉ DE GAUSS-CHIÒ POUR L'ÉVALUATION DES DÉTERMINANTS

Dragoslav S. Mitrinovitch

(Reçu le 3 mars 1959)

Dans cet article on montre:

1° que le procédé de *MacMillan* {voir [3]} est une variante du procédé bien connu, dû à *Gauss* et *Chiò*, pour la condensation des déterminants;

2° que le procédé de *MacMillan* exige plus d'opérations que celui de *Gauss-Chiò.*

En vue de quoi, l'opinion exprimée dans la note [4] sur la supériorité du procédé de *MacMillan* ne semble pas justifiée.