PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SERIE: MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 18 (1958)

O AMPLITUDAMA NORMALNIH ELIPTIČKIH INTEGRALA III VRSTE ZA KOJE SE TAKVI INTEGRALI REDUKUJU NA NORMALNE ELIPTIČKE INTEGRALE I I II VRSTE

Stanimir Fempl

1. Zamisao Legendre-a da eliptičke integrale dovodi na normalne forme dovela ga je do važnog saznanja da se svi eliptički integrali raspadaju u tri bitno različite i nesvodljive klase.

Za normalne eliptičke integrale I i II vrste mogle su se načiniti tablice [1], tako da su računi u kojima su se pojavljivale ovakve veličine bili znatno olakšani. To nije bio slučaj kad su se pojavljivali integrali III vrste za koje se ne mogu načiniti tablice, jer se tamo, kao što je poznato, pojavljuje i parametar. U takvom slučaju moralo se ostati pri razvijanju u redove, jednom dosta mučnom poslu. Usled toga se išlo za tim da se barem specijalni normalni integrali III vrste redukuju na one I i II vrste, kako bi se mogle upotrebiti tablice. Tako je još Abel [2] našao da se uz izvesne veze između modula i parametra normalni eliptički integrali III vrste mogu izraziti takvim integralima I vrste i logaritmima jedne algebarske funkcije.

Od specijalnih amplituda integrala III vrste dolazila je u obzir samo amplituda $\frac{\pi}{2}$. Tada imamo potpune normalne eliptičke integrale III vrste i ovi se mogu izraziti kombinacijama normalnih eliptičkih integrala I i II vrste.

Cilj mi je da pokažem u ovom radu da se, koristeći jedan stav koga ću ovde izvesti, jedan niz integrala III vrste sa amplitudama različitim od $\frac{\pi}{2}$ može svesti na potpune integrale te vrste. Pri tome moraju amplitude zadovoljavati izvesne uslove, a iz toga, onda, sledi mogućnost izražavanja eliptičkih integrala III vrste pomoću normalnih integrala I i II vrste.

2. Označićemo, kao što je to običaj, sa

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\Delta(\theta)},\quad E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\Delta(\theta)\,d\theta,\quad \prod(n,k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\,\Delta(\theta)}$$

normalne eliptičke integrale I, II i III vrste. Ovde je

$$\Delta(\omega) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega},$$

φ je amplituda, k moduo ($0 \leqslant k \leqslant 1$), a n parametar. U izvođenjima će se još upotrebljavati komplementaran moduo k' na osnovi veze

$$k^2 + k'^2 = 1 .$$

Stav koga izvodim mogao bi se nazvati multiplikacionom teoremom za normalne eliptičke integrale III vrste. On sledi iz poznate adicione teoreme za takve integrale koja glasi:

Kadgod tri amplitude φ, ψ i σ zadovoljavaju uslov

$$\cos\sigma = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \,\Delta(\sigma), \tag{1}$$

tada je

$$\prod(n, k, \varphi) + \prod(n, k, \psi) = \prod(n, k, \sigma) + \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,\Phi(\varphi, \psi, \sigma)$$

i obrnuto. Pri tome je

$$\Phi(\varphi, \psi, \sigma) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sin\varphi \sin\psi \sin\sigma \sqrt{n(n+1)(n+k^2)}}{1 + n\sin^2\sigma - n\sin\varphi \sin\psi \cos\sigma\,\Delta(\sigma)} & \text{za } n \geqslant 0 \text{ i za } n \in (-1, -k^2) \\ \dfrac{i}{2} \log \dfrac{1 + n\sin^2\sigma - \sin\varphi \sin\psi\,[\sin\sigma \sqrt{-n(n+1)(n+k^2)} + n\cos\sigma\Delta(\sigma)}{1 + n\sin^2\sigma + \sin\varphi \sin\psi\,[\sin\sigma \sqrt{-n(n+1)(n+k^2)} - n\cos\sigma\Delta(\sigma)} & \text{za } n \in (-k^2, 0) \end{cases}$$

Na osnovi toga imamo:

$$\prod(n, k, \varphi_1) + \prod(n, k, \varphi_1) = \prod(n, k, \varphi_2) + \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,\Phi(\varphi_1, \varphi_1, \varphi_2)\ ,$$

$$\prod(n, k, \varphi_1) + \prod(n, k, \varphi_2) = \prod(n, k, \varphi_3) + \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\ ,$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\prod(n, k, \varphi_1) + \prod(n, k, \varphi_{m-1}) = \prod(n, k, \varphi_m) + \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,\Phi(\varphi_1, \varphi_{m-1}, \varphi_m)\,,$$

gde je prema (1)

$$\cos\varphi_{\nu+1} = \cos\varphi_1 \cos\varphi_\nu - \sin\varphi_1 \sin\varphi_\nu \,\Delta(\varphi_{\nu+1})\,,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots m-1 .$$

Obrnuto, ako uzmemo φ_1 proizvoljno, a $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_m$ tako da budu zadovoljeni ovih $m-1$ uslova, moćićemo na osnovi adicione teoreme napisati navedenih $m-1$ jednačina za Π. Saberemo li ih, dobićemo

$$m\prod(n,\,k,\,\varphi_1)=\prod(n,\,k,\,\varphi_m)+\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\sum_{\nu=1}^{m-1}\Phi(\varphi_1,\,\varphi_\nu,\,\varphi_{\nu+1})\,.$$

Dakle:

Ako veličine $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots\ \varphi_m$ *zadovojlavaju uslove*

$$\cos\varphi_{\nu+1}=\cos\varphi_1\cos\varphi_\nu-\sin\varphi_1\sin\varphi_\nu\,\Delta(\varphi_{\nu+1}),\qquad \nu=1,\,2,\,\dots\,m-1, \tag{2}$$

onda je

$$\prod(n,\,k,\,\varphi_m)=m\prod(n,\,k,\,\varphi_1)-\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\sum_{\nu=1}^{m-1}\Phi(\varphi_1,\,\varphi_\nu,\,\varphi_{\nu+1})\,. \tag{3}$$

Polazeći od φ_1 mogu se postupno izračunati veličine $\varphi_2,\ \varphi_3,\ \dots\ \varphi_m$, a može se poći i obrnutim putem tj., polazeći od φ_m mogu se postupno izračunati veličine $\varphi_{m-1},\ \dots\ \varphi_2,\ \varphi_1$.

3. Problem svođenja normalnog eliptičkog integrala III vrste sa nekom amplitudom različitom od $\frac{\pi}{2}$ na potpuni integral ima prosto rešenje ako se za φ_m uzme vrednost $\frac{\pi}{2}$. Tada leva strana od (3) postaje potpuni integral koga ćemo označiti sa Π_0, a veličina $\Phi\left(\varphi_1,\,\varphi_{m-1},\,\varphi_m=\frac{\pi}{2}\right)$ koju ćemo označiti sa $\Phi_0^{(m-1)}$ ima vrednost

$$\Phi_0^{(m-1)}=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}\left[\sin\varphi_1\,\sin\varphi_{m-1}\sqrt{\dfrac{n(n+k^2)}{n+1}}\right], & \text{za } n\geqslant 0 \text{ i za } n\in(-1,\,-k^2),\\[2ex] \dfrac{i}{2}\log\dfrac{1+n-\sin\varphi_1\sin\varphi_{m-1}\sqrt{-n(n+1)(n+k^2)}}{1+n+\sin\varphi_1\sin\varphi_{m-1}\sqrt{-n(n+1)(n+k^2)}}, & \text{za } n\in(-k^2,\,0)\,.\end{cases}$$

Usled toga jednačina (3) dobiva oblik

$$\prod(n,\,k,\,\varphi_1)=\frac{1}{m}\prod\nolimits_0+\frac{1}{m}\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\left[\Phi_0^{(m-1)}+\sum_{\nu=2}^{m-1}\Phi(\varphi_1,\,\varphi_{\nu-1},\,\varphi_\nu)\right], \tag{4}$$

dok se poslednja jednačina (2), usled $\Delta(\varphi_m)=k'$ svodi na

$$\operatorname{tg}\varphi_{m-1}=\frac{1}{k'}\operatorname{ctg}\varphi_1.$$

Sada se iz prethodnih $m-2$ jednačina (2) izračunava — obrnutim redom — $\cos\varphi_{m-2}$, $\cos\varphi_{m-3}$, $\dots$ $\cos\varphi_1$, tako da se, konačno veličina φ_1 izražava pomoću modula k.

Veličina m je proizvoljan prirodan broj >1. Izneću nekoliko konkretnih slučajeva svođenja.

Za $m=2$, veličina ν, prema (2), prima jednu jedinu vrednost $\nu=1$. Tada otpada zbir na desnoj strani (4), pa ostaje

$$\prod (n, k, \varphi_1)=\frac{1}{2}\prod_0+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,\Phi_0^{(1)},$$

a uslovi (2) se svode na jedan jedini $\left(\varphi_2=\frac{\pi}{2}\right)$

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi_1=k'.$$

Veličina $\Phi_0^{(1)}$ postaje

$$\Phi_0^{(1)}=\begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{1+k'}\sqrt{\dfrac{n(n+k^2)}{n+1}} & \text{za } n\geqslant 0 \text{ i za } n\in(-1,-k^2),\\[2ex] \dfrac{i}{2}\log\dfrac{(1+k')^2\sqrt{n+1}-\sqrt{-n(n+k^2)}}{(1+k')^2\sqrt{n+1}+\sqrt{-n(n+k^2)}} & \text{za } n\in(-k^2,\,0).\end{cases}$$

Za $m=3$, izraz (4) se svodi na

$$\prod (n, k, \varphi_1)=\frac{1}{3}\prod_0+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\left[\Phi_0^{(2)}+\Phi\,(\varphi_1,\ \varphi_1,\ \varphi_2)\right]$$

i izraz u srednjoj zagradi opet pretstavlja jednu ciklometrisku ili logaritamsku funkciju, dok se uslovi (2) svode na

$$\cos\varphi_2=\cos^2\varphi_1-\sin^2\varphi_1\,\Delta\,(\varphi_2),$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{1}{k'}\operatorname{ctg}\varphi_1$$

Iz toga sledi uslovna jednačina za φ_1

$$\frac{k'\sin\varphi_1}{\Delta\,(\varphi_1)}=\cos^2\varphi_1-\frac{k'\sin^2\varphi_1}{\Delta\,(\varphi_1)},$$

tj., posle deljenja sa $1+\sin\varphi\neq 0$.,

$$k^2\sin^4\varphi_1-2\,k^2\sin^3\varphi_1-2\sin\varphi_1+1=0\,.$$

Lako se uverava da ova jednačina ima jedan jedini koren $\sin\varphi_1$ između 0 i 1, a njegova je vrednost

$$\sin\varphi_1=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+A}+\sqrt{2-A+2\sqrt{1-A+A^2}}\right),$$

gde je

$$\mathbf{A}=\sqrt[3]{\frac{4\,k'^2}{k^4}}$$

Unošenjem ovih vrednosti u poslednji izraz za $\Pi(n, k, \varphi_1)$ dobiva se ta veličina izražena pomoću potpunog normalnog eliptičkog integrala III vrste i jedne elementarne funkcije. Sama vrednost za $\Pi(n, k, \varphi_1)$ nije od naročitog interesa i stoga nije ovde izračunata.

Za $m = 4$ moglo bi se opet poći od uslova (4), no može se izabrati i kraći put naime, prvo izraziti $\prod(n, k, \varphi_1)$ sa $\frac{1}{2}\prod(n, k, \varphi_2)$ pomoću uslova

$$\cos\varphi_2 = \cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1\,\Delta(\varphi_2),$$

a zatim $\Pi(n, \mathrm{k}, \varphi_2)$ izraziti potpunim integralom Π_0 tj. uzeti uslov

$$\mathrm{ctg}^2\varphi_2 = k'.$$

Iz poslednje dve jednačine izlazi

$$\sqrt{\frac{k'}{1+k'}} = \cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1\sqrt{k'},$$

tj.

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{\sqrt{1+k'} - \sqrt{k'}}{(1+\sqrt{k'})\sqrt{1+k'}}$$

Uz ovaj uslov izražava se $\prod(n, k, \varphi_1)$ pomoću $\frac{1}{4}\prod_0$ itd.

Za vrednost $m > 4$ računi će se, razumljivo, komplikovati. Ali iz prethodnog izlaganja ipak se može izvući jedan opšti zaključak:

Postoji beskrajan niz amplituda normalnih eliptičkih integrala III vrste koje, uz izvesne uslove, dozvoljavaju svođenje ovakvih integrala na potpune integrale, dakle, koje dozvoljavaju izražavanje takvih integrala pomoću normalnih eliptičkih integrala I i II vrste i pomoću jedne elementarne funkcije, ciklometriske ili logaritamske.

Takođe se može nešto reći i o uzračunavanju veličina $\varphi_{m-1}, \varphi_{m-2}, \ldots \varphi_2$ iz amplituda φ_m i φ_1. Ako se, naime, jednačine (2) racionaliziraju, posle kraćeg računa, one se svode na oblik

$$(k'^2 + k^2\cos^2\varphi_1 + k^2\cos^2\varphi_{\nu+1} - k^2\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_{\nu+1})\cos^2\varphi_\nu - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_{\nu+1}\cos\varphi_\nu +$$
$$+ (k^2\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_{\nu+1} + k'^2\cos^2\varphi_1 + k'^2\cos^2\varphi_{\nu+1} - k'^2) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots m-1 .$$

Odavde se vidi da se veličine $\cos\varphi_{m-1}, \cos\varphi_{m-2}, \ldots \cos\varphi_2$ dobivaju sukcesivno iz jedne serije *kvadratnih* jednačina čiji su koeficijenti polinomi po kosinusima amplituda neposredno višeg indeksa i po $\cos\varphi_1$.

Napomenuo bih još nešto o vrednostima potpunih integrala III vrste koji će se pojaviti prilikom svođenja. Ako se sa $\Lambda(k, \psi)$ obeleži jedna linearna kombinacija normalnih eliptičkih integrala I i II vrste

$$\Lambda(k, \psi) = EF(k', \psi) + FE(k', \psi) - FF(k', \psi)$$

gde su F i E potpuni integrali I i II vrste, tada — na osnovi jednog ranijeg rada [3] — za pozitivno n i stavljajući $n = \operatorname{ctg}^2 \psi$ imaćemo

$$\prod_0 = \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}\left[\frac{\pi}{2} + F \operatorname{tg}\psi \sqrt{1-k'^2\sin^2\psi} - \Lambda(k,\psi)\right],$$

za $n \in (-1, -k^2)$, stavljajući $n = -1 + k'^2 \sin^2 \psi$ imaćemo

$$\prod_0 = F + \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}{k'^2\sin\psi\cos\psi}\left[\frac{\pi}{2} - \Lambda(k, \psi)\right],$$

dok za $n \in (-k^2, 0)$, stavljajući $n = -k^2 \sin^2 \psi$ imamo

$$\prod_0 = F + \frac{\operatorname{tg}\psi}{\Delta(\psi)} L(k, \psi),$$

gde je

$$L(k, \psi) = FE(k, \psi) - EF(k, \psi).$$

Može se primetiti da u ovim izlaganjima nije tretiran slučaj parametra integrala III vrste $n < -1$. Ovaj slučaj ne dolazi u obzir iz sledećeg razloga. Pošto se radi o svođenju na potpuni integral III vrste, za vrednost podintegralne promenljive

$$\theta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{-n}}$$

koja se nalazi između integralnih granica 0 i $\frac{\pi}{2}$, podintegralna funkcia ima diskontinuitet. Usled toga je integral Π_0 divergentan, pa taj slučaj otpada.

4. U izloženim redukcijama su moduo k i parametar n integrala III vrste — uz navedena ograničenja — bili potpuno proizvoljni. Ako se i za njih postave medjusobne veze, mogu se postići dalja uprošćenja, te potpuni integral III vrste izraziti samo potpunim integralom I vrste. Ovakvi problemi obrađeni su u mom ranijem radu [3], a interesantno je napomenuti da veze između modula i parametra imaju istu strukturu kao i jednačine (4), samo mesto k stoji k', dakle

$$\cos\psi_{\nu+1} = \cos\psi_1 \cos\psi_\nu - \sin\psi_1 \sin\psi_\nu\, \Delta_1(\psi_{\nu+1}), \quad \nu = 1, 2, \ldots m-1,$$

gde je

$$\Delta_1(\omega) = \sqrt{1-k'^2\sin^2\omega}$$

i gde treba staviti $n = \operatorname{ctg}^2\psi_1$ za $n > 0$ i $n = -1 + k'^2 \sin^2 \psi_1$ za $n \in (-1, -k^2)$. Za $n \in (-k^2, 0)$ veze su iste kao i jednačine (4), pri čemu samo treba staviti $n = -k^2 \sin^2 \psi_1$.

5. U navedenim izlaganjima uziman je Legendre-ov tip eliptičkog integrala za normalni tip. Pokazalo se da nije opravdano jednoj izvesnoj formi eliptičkog integrala III vrste dati neku naročitu prednost, a s tim u vezi i jedno naročito funkcionalno obeležje, jer su se našle i mnoge druge ravnopravne forme. Na osnovi Jacobi-jeva stava da se Legendre-ov normalni tip eliptičkog integrala III vrste koji sadrži tri argumenta svodi na funkcije koje sadrže samo dva argumenta, izgledalo je da su ovi integrali izgubili svoju aktuelnost. No, u velikom broju slučajeva, naročito u geometriskim primenama i kada se radi o jednostavnijim transformacijama, uzimanje Legendre-va tipa za normalan tip imalo je svoje opravdanje, tim pre što se Legendre-ova metoda odlikuje svojim naročito elementarnim karakterom. Kada se još uzme u obzir da prelaz na eliptičke funkcije često puta otežava i formalno i numeričko računanje sa integralima III vrste, tretiranje Legendre-ova tipa može i nadalje biti od interesa. Iz tih se razloga i pristupilo ovom radu.

LITERATURA

[1]. BYRD F. P. AND FRIEDMANN D.:
Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Berlin—Göttingen—Heidelberg. 1954.

[2]. ABEL N. H.:
Oeuvres complètes I. Nouv. éd. par L. Sylow et S. Lie. Leipzig 1881; /528—565/.

[3]. FEMPL S.:
O jednoj linearnoj kombinaciji normalnih eliptičkih integrala I i II vrste. Teza. Zbornik radova Matematičkog instituta SAN 5. /1956/; 61—116.

ZUSAMMENFASSUNG

ÜBER DIE AMPLITUDEN DER ELLIPTISCHEN NORMALINTEGRALEN III GATTUNG FÜR WELCHE SICH SOLCHE INTEGRALE AUF ELLIPTISCHE NORMALINTEGRALE I U. II GATTUNG REDUCIEREN

Stanimir Fempl

In dieser Abhandlung wird ein Satz ausgeführt auf Grund dessen sich eine Folge von elliptischen Normalintegralen III Gattung mit verschiedenen Amplituden durch vollständige Integrale derselben Gattung ausdrücken lasst.

Im Satz ist gezeigt dass (3) immer gillt sobald die Amplituden den Bedingungen (2) genügen, und umgekehrt. Dabei ist Φ eine elementare Funktion, und es hängt vom Parameter des Integrals III Gattung ab, eas diese Funktion eine zyklometrische oder eine logaritmische ist. Wenn man in (2) und in (3) setzt $\varphi_m = \frac{\pi}{2}$, so folgen die Reduktionen im angeführten Sinn.

Die Grösse m ist eine beliebige natürliche Zahl > 1, und für verschiedene Werte von m bekommt man eine Folge spezieler Integralen III Gattung ausgedrückt durch vollständigen Integralen derselben Gattung.