Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak.
Ser. Mat. 3 (1992), 17–20

DEUX INÉGALITÉS POUR DES FONCTIONS CONVEXES

Sever Silvestru Dragomir, Borislav Crstici

On donne quelques inégalités pour des fonctionnelles linéaires et positives sur une algèbre des fonctions réeles.

Soit T un ensemble non vide et $F(T)$ une algèbre des fonctions réelles munie de la relation d'ordre canonique

$$x \geq y \Leftrightarrow x(t) \geq y(t), \qquad t \in T,\ x, y \in F(T).$$

1. Supposons que $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe sur I.

Théorème 1. *Si A, B, C sont trois fonctionnelles linéaires et positives sur $F(T)$, alors pour tout $x, y, z, a, b, c \in F(T)$ vérifiant les conditions*

1° $x(t) \leq y(\tau) \leq z(s)$, *pour tout* $t, \tau, s \in T$;

2° $x, y, z : T \to I$ *et* $f \circ x, f \circ y, f \circ z \in F(T)$;

3° $a, b, c \geq 0$;

on a l'inégalité

$$\begin{vmatrix} A(xa) & A[(f\circ x)a] & Aa \\ B(yb) & B[(f\circ y)b] & Bb \\ C(zc) & C[(f\circ z)c] & Cc \end{vmatrix} \geq 0. \tag{1}$$

Parce que f est convexe, on a l'inégalité

$$\begin{vmatrix} x(t) & f(x(t)) & 1 \\ y(\tau) & f(y(\tau)) & 1 \\ z(s) & f(z(s)) & 1 \end{vmatrix} \geq 0 \tag{2}$$

pour tout t, $\tau, s \in T$.

1991 AMS Subject Classification: 26D15

En multipliant la relation (2) avec $a(t)b(\tau)c(s) \geq 0$, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} a(t)x(t) & f(x(t))a(t) & a(t) \\ b(\tau)y(\tau) & f(y(\tau))b(\tau) & b(\tau) \\ c(s)z(s) & f(z(s))c(s) & c(s) \end{vmatrix} \geq 0.$$

Pour tout τ, s fixés, nous avons dan l'ordre de $F(T)$, l'inégalité suivante

$$\begin{vmatrix} f(y(\tau))b(\tau) & b(\tau) \\ f(z(s))c(s) & c(s) \end{vmatrix} ax - \begin{vmatrix} b(\tau)y(\tau) & b(\tau) \\ c(s)z(s) & c(s) \end{vmatrix} (f \circ x)a + \begin{vmatrix} b(\tau)y(\tau) & f(y(\tau))b(\tau) \\ c(s)z(s) & f(z(s))c(s) \end{vmatrix} a \geq 0.$$

En appliquant la fonctionnelle A, nous avons

$$\begin{vmatrix} A(xa) & A[(f \circ x)a] & Aa \\ b(\tau)y(\tau) & f(y(\tau))b(\tau) & b(\tau) \\ c(s)z(s) & f(z(s))c(s) & c(s) \end{vmatrix} \geq 0$$

pour tout $\tau, s \in T$.

En continuant le raisonement, nous obtenons l'inégalité (1).

Conséquences.

1° *Dans l'hypothèse de la Théorème 1, nous avons*

$$\begin{vmatrix} A(xa) & A[(f \circ x)a] & Aa \\ A(yb) & A[(f \circ y)b] & Ab \\ A(zc) & A[(f \circ z)c] & Ac \end{vmatrix} \geq 0.$$

Si $A(\ ) = 1$, *il résulte*:

$$\begin{vmatrix} Ax & A(f \circ x) & 1 \\ Ay & A(f \circ y) & 1 \\ Az & A(f \circ z) & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

2° *Pour tout* $x, y, z \geq 0$ *vérifiant la condition* 1°, *nous avons*

$$\begin{vmatrix} Ax & A(x^p) & 1 \\ Ay & A(y^p) & 1 \\ Az & A(z^p) & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

où $A(\ ) = 1$ *et* $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$.

3° *Si* $x, y, z \in F(T)$ *implique* $e^x, e^y, e^z \in F(T)$, *alors pour* x, y, z *vérifiant la propriété* 1°, *nous avons*

$$\begin{vmatrix} Ax & A(e^x) & 1 \\ Ay & A(e^y) & 1 \\ Az & A(e^z) & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

2. Dans la suite, nous considérons une fonction $f : \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable sur $\mathring{I}$.

Théorème 2. *Si A, B sont deux fonctionnelles linéaires et positives sur $F(T)$, alors pour tout $x, y, u, v \in F(T)$ vérifiant les conditions:*

a) *$x, y : T \to I$ et $f \circ x, f \circ y, (Df) \circ x \in F(T)$ où $(Df)(s) := f'(s)$ pour tout $s \in \mathring{I}$;*

b) *$u, v \geq 0$;*

on a l'inégalité

$$A[u(f \circ x)]Bv + A[u(Df \circ x)]B(yv) \leq A[xu(Df \circ x)]Bv + AuB[v(f \circ y)]. \tag{3}$$

Parce que f est convexe et dérivable, pour tout $t, \tau \in T$ on a l'inégalité:

$$f(x(t)) + \big(y(\tau) - x(t)\big)(Df)(x(t)) \leq f(y(\tau)).$$

En multipliant avec $u(t)v(\tau) \geq 0$, nous obtenons

$$f(x(t))u(t)v(\tau) + Df(x(t))u(t)v(\tau) \leq x(t)Df(x(t))u(t)v(\tau) + u(t)f(y(\tau))v(\tau)$$

pour tout $t, \tau \in T$.

En fixant $\tau \in T$, nous avons dans l'ordre de $F(T)$

$$v(\tau)(f \circ x)u + y(\tau)v(\tau)(Df \circ x)u \leq v(\tau)xu(Df \circ x) + f(y(\tau))v(\tau)u.$$

En applicant la fonctionnelle A, nous obtenons dans $F(T)$

$$A[(f \circ x)u]v + A[(Df \circ x)u]yv \leq A[(Df \circ x)xu]v + (Au)[(f \circ y)v].$$

En applicant encore B, nous obtenons (3).

Conséquences.

1° *Si $A : F(T) \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle linéaire et positive, alors on a les inégalités suivantes*

$$A[(f \circ x)u]Av + A[u(Df \circ x)]A(yv) \leq A[xu(Df \circ x)]Av + AuA[(f \circ y)v]$$

et

$$A[u(Df \circ x)]A(yv) \leq A[u(Df \circ x + f \circ y - f \circ x)]Au.$$

Si $A(\ ) = 1$, nous obtenons

$$A(Df \circ x)Ay - A(Df \circ x) \leq A(f \circ y - f \circ x).$$

2° *Si A, B sont deux fonctionnelles linéaires et positives, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, alors*

$$A(x^{p-1}u)B(yv) \leq \frac{1}{q}A(x^p u)Bu + \frac{1}{p}A(u)B(y^p v)$$

où $1/q + 1/p = 1$ et $x, y, u, v \geq 0$.

En faisant $p = 2$, nous obtenons

$$A(xu)B(yv) \leq \frac{1}{2}\big[A(x^2u)Bv + AuB(y^2v)\big],$$
$$A(x^2)B(y^2) \leq \frac{1}{2}\big[A(x^3)By + AxB(y^3)\big].$$

On peut voir aussi lest travaux [**1**]–[**5**].

BIBLIOGRAPHIE

1. : *On Jensen's inequality for convex functions.* J. Math. Anal. Appl., **110** (1985), 536–552.
2. : *An improvement of Jensen's inequality.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, **34** (1990), 291–296.
3. : *On some inequalities for convex-dominated functions.* Anal. Num. Theor. Approx., **19** (1990), 21–27.
4. : *A note on the Jensen-Hadamard inequality.* Anal. Num. Theor. Approx., **19** (1990), 29–34.
5. : *A generalization of Hadamard's inequality for isotonic linear functionals.* Rad. Mat., **7** (1991), 103–107.

Facultatea de Matematică,
Universitatea Timişoara,
B-dul V. Pârvan 4,
R-1900 Timişoara,
Romania

Catedra de Matematică,
Institutul Politehnic,
P-ţa Horaţiu 1,
R-1900 Timişoara,
Romania

(Received November 11, 1991)