Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak.
Ser. Mat. 3 (1992), 3–4

BEMERKUNG ZU DER ARBEIT VON A. M. OSTROWSKI „NOTIZ ÜBER MAXIMALWERTE VON POLYNOMEN AUF DEM EINHEITSKREIS“

Ernst Mohr†

1. Gegeben sind zwei Polynome $(m, n \geq 1)$

$$f(z) = z^m + \cdots = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_m) \tag{1}$$

$$g(z) = z^n + \cdots = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \cdot \ldots \cdot (z - \beta_m). \tag{2}$$

Mit der Bezeichnung $M_f := \max_{|z|=1} |f(z)|$ beweist A. M. Ostrowski in seiner Arbeit [**1**] die Ungleichung

$$M_{fg} \geq \nu M_f M_g, \qquad \nu = \left\{ \sin \frac{\pi}{8m} \right\}^m \cdot \left\{ \sin \frac{\pi}{8n} \right\}^n.$$

Wir zeigen: es gilt die verschärfte Ungleichung

$$M_{fg} > \nu_1 M_f M_g, \qquad \nu_1 = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^n} > \nu. \tag{3}$$

2. Für ein Polynom $h(z) = z^l + \cdots = (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_l)$, $|z_1| \leq 1, \ldots, |z_l| \leq 1$ $(l \geq 1)$ ist

$$M_h = \max_{|z|=1} \left\{ \frac{h(z)}{z^l} \right\} = \max_{|z|=1} \left| \left(1 - \frac{z_1}{z}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{z_l}{z}\right) \right|$$

das heißt: mit $w = 1/z$, $\chi(w) = (1 - z_1 w) \cdot \ldots \cdot (1 - z_l w)$

$$M_h = \max_{|w|=1} |\chi(w)| = \max_{|w|\leq 1} |\chi(w)|, \qquad \chi(0) = 0.$$

Daraus folgt (Maximum-Prinzip)

$$M_h \geq 1 \tag{4}$$

†Professor E. Mohr, Technical University of Berlin, died in 1989.

1991 AMS Subject Classification: Primary 26 D 05

mit dem Zusatz $= 1$ genau dann, wenn $z_1 = \ldots = z_l = 0$.

Anderseits ist

$$M_h \leq 2^l \tag{5}$$

mit dem Zusatz: $= 2^l$ genau dann, wenn

$$z_1 = \ldots = z_l = e^{i\vartheta} \qquad (\vartheta \text{ reel}).$$

3. Für ein α, $|\alpha| > 1$, ist der an $|z| = r$ gespiegelte Punkt $\dfrac{1}{\bar\alpha}$, $\left|\dfrac{1}{\bar\alpha}\right| < 1$, und es ist

$$(z-\alpha) = \left(z - \frac{1}{\bar\alpha}\right) \cdot \bar\alpha \cdot \frac{\alpha - z}{1 - \bar\alpha z}, \qquad \left|\frac{z-\alpha}{1-\bar\alpha z}\right| = 1 \qquad \text{für} \quad |z| = 1. \tag{6}$$

4. Die α_μ und β_ν in (1) und (2) seien so numeriert:

$$\begin{cases} \alpha_1, \ldots, \alpha_p \;\mid\; \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_m; & |\alpha_{p+1}| > 1, \ \ldots, \ |\alpha_m| > 1 \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \;\mid\; \beta_{q+1}, \ldots, \beta_n; & |\beta_{q+1}| > 1, \ \ldots, \ |\beta_n| > 1. \end{cases}$$

Mit den Abkürzungen

$$F(z) = (z-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_p)\left(z - \frac{1}{\bar\alpha_{p+1}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(z - \frac{1}{\bar\alpha_m}\right), \qquad A = \bar\alpha_{p+1} \cdot \ldots \cdot \bar\alpha_m$$

und den analogen für $g(z)$ ergibt sich infolge (6) aus (1) und (2) (leeres Produkt $= 1$)

$$f(z) = F(z) \cdot A \cdot \prod_{p+1}^{m} \left(\frac{\alpha_\mu - z}{1 - \bar\alpha_\mu z}\right), \qquad g(z) = G(z) \cdot B \cdot \prod_{q+1}^{n} \left(\frac{\beta_\nu - z}{1 - \bar\beta_\nu z}\right).$$

Nach (6) ist

$$\begin{gathered} M_f = M_F \cdot |A|, \qquad M_g = M_G \cdot |B|, \qquad M_{fg} = M_{FG} \cdot |A| \cdot |B| \\ \frac{M_{fg}}{M_f M_g} = \frac{M_{FG}}{M_F M_G}. \end{gathered} \tag{7}$$

Auf $F(z)$, $G(z)$ und $F(z)G(z)$ treffen die Voraussetzungen in 2 zu: nach (4) und (5) mit den Zusatzen gelten die Ungleichungen

$$M_{FG} \geq 1, \qquad M_F \leq 2^m, \qquad M_G \leq 2^n,$$

in denen mindestens einmal das Gleichheitszeichen nicht auftritt! Daraus und aus (7) folgt (3).

LITERATUR

1. : *Notiz über Maximalwerte von Polynomen auf dem Einheitskreis.* Univ. Beograd, Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz. **634**– **677** (1979), 55–56.

(Received September 25, 1981)
(Revised February 21, 1984)