PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SERIE: MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 11 (1957)

COMPLÉMENTS AU TRAITÉ DE KAMKE. V.

D. S. Mitrinovitch

1. Cette Note fait suite à nos notes antérieures **[1]**, ayant pour but de compléter et augmenter le Recueil d'équations différentielles inséré dans le Traité de *Kamke* **[2]**.

Dans la présente Note nous allons indiquer des équations différentielles linéaires, intégrables au moyen des quadratures et des fonctions spéciales (fonctions de *Bessel*, de *Pochhammer*, etc.) ayant, entre autres, la forme suivante

$$(1)\qquad \frac{d^{n+k}y}{dx^{n+k}}-f(x)\left[A_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+A_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+A_{n-1}\,x\frac{dy}{dx}+A_ny\right]=0.$$

(n, k nombres naturels; A_ν constantes quelconques).

Chez *Kamke* **[2]**, on trouve seulement quelques équations particulières du type (1).

2. Considérons l'équation différentielle

$$(2)\qquad y^{(n+k)}-f(x)\;L[y]=0$$

avec

$$(3)\qquad L[y]=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\nu!\binom{n}{\nu}x^{n-\nu}y^{(n-\nu)},\quad (0!=1,\ y^{(0)}=y),$$

où $y^{(r)}=d^ry/dx^r$ $(r=1,\ 2,\cdots,\ n+k)$.

L'équation (2) appartient au type (1).

En posant $L[y]=z$, on a, après la dérivation successive,

$$(4)\qquad \begin{aligned} z' &= x^ny^{(n+1)},\\ z'' &= (x^n)'y^{(n+1)}+x^ny^{(n+2)},\\ z''' &= (x^n)''y^{(n+1)}+\binom{2}{1}(x^n)'y^{(n+2)}+x^ny^{(n+3)},\\ &\;\vdots\\ z^{(k)} &= \sum_{r=1}^{k}\binom{k-1}{r-1}(x^n)^{(k-r)}y^{(n+r)}\end{aligned}$$

avec $(x^n)^{(s)} = d^s(x^n)/dx^s$.

Le résultat de l'élimination des k quantités

$$y^{(n+1)}, \qquad y^{(n+2)}, \ldots, \qquad y^{(n+k)}$$

entre les $(k+1)$ relations (2) et (4), quelques transformations étant préalablement effectuées, est la relation suivante:

$$\begin{vmatrix} z' & x^n & 0 & \cdots & 0 \\ z'' & (x^n)' & x^n & & 0 \\ z''' & (x^n)'' & \binom{2}{1}(x^n)' & & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ z^{(k-1)} & (x^n)^{(k-2)} & \binom{k-2}{1}(x^n)^{(k-3)} & & x^n \\ z^{(k)} & (x^n)^{(k-1)} & \binom{k-1}{1}(x^n)^{(k-2)} & & \binom{k-1}{k-2}(x^n)' \end{vmatrix} + (-1)^k x^{kn} f(x) z = 0.$$

La dernière équation, après le développement du déterminant d'ordre k y intervenant, prend la forme suivante

(5) $\quad x^k z^{(k)} + a_1 x^{k-1} z^{(k-1)} + a_2 x^{k-2} z^{(k-2)} + \cdots + a_{k-1} x z' - x^{n+k} f(x) z = 0,$

où les coefficients a_r sont des fonctions de n et de k, à savoir:

$$a_r = (-1)^r\, r!\binom{k-1}{r}\binom{n+r-1}{r}, \qquad (r = 1,\ 2, \cdots, k-1).$$

L'équation (5) s'écrit aussi sous la forme suivante

$$z^{(k)} - \binom{k-1}{1}(x^n)' z^{(k-1)} + \binom{k-1}{2}(x^n)'' z^{(k-2)} - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1}(x^n)^{(k-1)} z'$$
$$-f(x)\, x^n z = 0,$$

ou bien

$$z^{(k)} + g_1(x)\, z^{(k-1)} + g_2(x)\, z^{(k-2)} + \cdots + g_{k-1}(x)\, z' - f(x)\, x^n z = 0,$$

avec

$$g_r(x) = (-1)^{r-1}\binom{k-1}{r}(x^n)^{(r)}, \quad r = 1, 2, \cdots, k-1.$$

Par suite, l'équation linéaire (2) se réduit à l'équation (5), suivie de l'équation linéaire $L[y] = z$.

L'intégrale générale de l'équation homogène $L[y] = 0$ est

$y = C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n \qquad$ (C_p constantes d'intégration).

Pour trouver la solution générale de l'équation complète $L[y] = z$, il reste à lui appliquer la méthode de variation des constantes, qui est due à *Lagrange*.

Lorsqu'on admet $k=2, 3, 4$, l'équation (5) prend les formes respectives suivantes:

$$x^2z''-nxz'-x^{n+2}f(x)\,z=0, \tag{6}$$

$$x^3z'''-2nx^2z''+n\,(n+1)\,xz'-x^{n+3}f(x)\,z=0, \tag{7}$$

$$x^4z^{(4)}-3nx^3z'''+3n\,(n+1)\,x^2z''-n\,(n+1)\,(n+2)\,xz'-x^{n+4}f(x)\,z=0. \tag{8}$$

Toutes les fois où les équations (6), (7), (8) s'intègrent, il en sera de même de l'équation (2) pour $k=2, 3, 4$. Dans la suite, nous allons illustrer ceci par quelques exemples convenablement choisis.

3. Prenons l'équation {*cf.* [2], p. 440, équation 2.162 (6)}

$$x^2z''+(1-2\nu)\,xz'+\nu^2\,(x^{2\nu}+1-\nu^2)\,z=0 \tag{9}$$

dont la solution est

$$z=x^{\nu}Z_{\nu}(x^{\nu}),$$

où Z_ν désigne

$$Z_\nu(t)\equiv C_1J_\nu(t)+C_2J_{-\nu}(t), \qquad (\nu \neq \text{nombre entier});$$

et

$$Z_\nu(t)=C_1J_\nu(t)+C_2N_\nu(t), \qquad (\nu=\text{nombre entier}).$$

(C_1 et C_2 sont ici des constantes d'intégration, $J_\nu(t)$ et $N_\nu(t)$ les fonctions de *Bessel* de première et seconde espèce {*cf.* aussi [3], p. 305–312}.

En comparant les équations (6) et (9), on obtient

$$n=2\nu-1, \quad f(x)\equiv\nu^2\,[\,(\nu^2-1)\,^2x^{-2\nu-1}-x^{-1}],$$

où $\nu=1, 2, 3,\cdots$, tandis que, dans (9), cette restriction ne s'imposait pas.

Par suite, la solution générale de l'équation

$$x^{2\nu+1}y^{(2\nu+1)}-\nu^2\,(x^2-\nu^2+1)\,\Big[x^{2\nu-1}y^{(2\nu-1)}$$
$$-1\,!\binom{2\nu-1}{1}x^{2\nu-2}y^{(2\nu-2)}+\cdots-(2\nu-1)\,!\binom{2\nu-1}{2\nu-1}y\,\Big]=0 \tag{10}$$

s'exprime à l'aide des fonctions de *Bessel*.

La comparaison de l'équation (6) avec

$$xz''+(1-2\nu)\,z'+xz=0 \tag{11}$$

{*cf.* [2], p. 440, équation 2.162 (8)} fournit:

$$n=2\nu-1, \qquad f(x)\equiv -x^{-2\nu},$$

ν étant un nombre naturel, tandis que, dans (11), cette restiction n'a pas été nécessaire.

Étant donné que la solution de (11) est

$$z = x^{\nu} Z_{\nu}(x),$$

on voit que l'équation (2), correspondant à ce cas, à savoir

$$x^{2\nu} y^{(2\nu+1)} + x^{2\nu-1} y^{(2\nu-1)} - 1!\binom{2\nu-1}{1} x^{2\nu-2} y^{(2\nu-2)} + \dots$$
$$+ (-1)^{2\nu-1} (2\nu-1)!\binom{2\nu-1}{2\nu-1} y = 0,$$

s'intègre aussi au moyen des fonctions de *Bessel*.

Appliquons maintenant le même procédé à l'équation

(12) $$x^2 z'' + axz' + (bx^m + c) z = 0, \quad (m \neq 0, \ a, \ b, \ c \text{ constantes})$$

qui embrasse les équations (9) et (11) comme des cas particuliers.

La solution générale de l'équation (12) est {*cf* [**2**], p. 440, équation 2.162 (1a)}

$$z = x^{\frac{1-a}{2}} Z_{\nu}\left(\frac{2}{m}\sqrt{b}\, x^{\frac{m}{2}}\right), \quad \nu = \frac{1}{m}\sqrt{(1-a)^2 - 4c}, \quad b \neq 0;$$

$$z = C_1 x^{\frac{1-a+\mu}{2}} + C_2 x^{\frac{1-a-\mu}{2}}, \quad \mu = \sqrt{(1-a)^2 - 4c} \neq 0, \quad b = 0;$$

$$z = x^{\frac{1-a}{2}} (C_1 + C_2 \log x), \quad (1-a)^2 - 4c = 0, \quad b = 0.$$

Toutes ces formules sont écrites sous la condition que $x > 0$.

En confrontant les équations (6) et (12), on trouve

(13) $$n = -a, \quad f(x) = -x^{a-2}(bx^m + c),$$

a devant être: $-1, \ -2, \ -3, \dots$

Si l'on introduit les données (13) dans l'équation

$$y^{(n+2)} - f(x)\, L[y] = 0,$$

on a l'équation linéaire dont la solution est une fonction qui s'exprime au moyen des fonctions de *Bessel*, suivies des fonctions élémentaires.

Parmi les équations de ce type se trouve aussi la suivante

$$\alpha x^p y^{(n+2)} + x^n y^{(n)} - 1!\binom{n}{1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + (-1)^n n!\binom{n}{n} y = 0$$

(n nombre naturel; α, p nombres quelconques) dont la solution générale s'exprime au moyen des fonctions de *Bessel*. Dans le Recueil de *Kamke* ne se trouve pas ladite équation, pas même ses cas particuliers suivants:

$$\alpha x^p y''' + xy' - y = 0,$$

$$\alpha x^p y'''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

La mise en correspondance de l'équation (6) avec une autre équation, convenablement choisie, peut être poursuivie. Ainsi, par exemple, on peut utiliser, dans le but mentionné, les équations suivantes du Recueil de *Kamke* [**2**]:

2.97, 2.98, 2.99, 2.103, 2.104, 2.105, 2.106, 2.138, 2.140, 2.176, 2.179, 2.187, 2.400, 2.409, etc.

L'équation 2.138 a la forme

$$xz'' + az' - \frac{1}{4}(x - 2a - 4b)z = 0, \quad (a,\ b \text{ constantes}), \tag{14}$$

et se ramène, au moyen de la transformation $z = u \exp(-x/2)$, à l'équation

$$xu'' + (b - x)u' - au = 0, \tag{15}$$

ce qui est l'équation confluente hypergéométrique.

En mettant en correspondance l'équation (6) avec (14), on obtient

$$n = -a, \quad f(x) \equiv \frac{1}{4} x^{a-2}(x - 2a - 4b), \tag{16}$$

a devant prendre les valeurs: $a = -1,\ -2,\ -3,\ \dots$

En ce cas, nous avons l'équation

$$y^{(n+2)} - f(x)\, L[y] = 0 \tag{17}$$

admettant la solution qui s'exprime à l'aide des fonctions hypergéométriques confluentes (fonctions de *Pochhammer*).

Lorsque la différence $b - a$ est un entier positif, la solution de (17), avec (16), s'exprime au moyen des fonctions élémentaires.

4. Considérons parallèlement les équations (7) et celle de *Burchnall—Chaundy* {*cf.* [**2**], p. 516, équation 3.49}:

$$x^2 z''' - 3(p+q)xz'' + 3p(3q+1)z' - x^2 z = 0 \tag{17}$$

(p, q nombres entiers positifs).

La solution de (17) est

$$z = \prod_{\mu=0}^{p-1} (\delta - 3\mu - 1) \prod_{\nu=0}^{q-1} (\delta - 3\nu - 2) \sum_{k=1}^{3} C_k \exp(\varepsilon_k x),$$

avec $\delta \equiv x(d/dx)$ et ε_k les solutions de $\varepsilon^3 = 1$.

L'équation (7) se ramène à (17), lorsque les conditions

$$2n = 3(p+q), \quad n(n+1) = 3p(3q+1), \quad f(x) \equiv x^{-n} \tag{18}$$

sont remplies.

La réduction de (7) à (17) s'effectue, ce qui résulte de (18), pour tous les entiers positifs p, q vérifiant l'équation diophantienne

$$(19) \qquad 3(p+q)^2+2(p+q)=4p(3q+1),$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$p=\frac{2}{3}\,\frac{1}{t-1},\quad q=\frac{2}{3}\,\frac{t}{t-1},\quad t\neq 1,$$

t étant un paramètre,

L'équation (19) se décompose en

$$p=q \quad \text{et} \quad p-q=2/3.$$

Comme l'équation indéterminée

$$p-q=2/3$$

n'a aucune solution en nombres entiers, il résulte, grâce à l'équation $p=q$, que la solution la plus générale de l'équation (19), en nombres naturels, est définie par

$$p=N,\quad q=N,\quad (N \text{ nombre naturel arbitraire}).$$

Mettant à profit le résultat obtenu ci-dessus, on peut énoncer la proposition suivante.

L'équation différentielle

$$(20) \qquad x^{3N}y^{(3N+3)}-x^{3N}y^{(3N)}+1\,!\binom{3N}{1}x^{3N-1}y^{(3N-1)}-2\,!\binom{3N}{2}x^{3N-2}y^{(3N-2)}$$
$$+\cdots+(-1)^{3N}(3N)\,!\binom{3N}{3N}y=0$$

est intégrable et sa solution générale est définie par

$$(21) \qquad x^{3N}y^{(3N)}-1\,!\binom{3N}{1}x^{3N-1}y^{(3N-1)}+\cdots+(-1)^{3N}(3N)\,!\binom{3N}{3N}y=z,$$

avec

$$z=\prod_{\mu=0}^{N-1}(\delta-3\mu-1)\prod_{\nu=0}^{N-1}(\delta\quad 3\nu-2)\sum_{k=1}^{3}C_k\exp(\varepsilon_k x)$$

$$(\delta\equiv x\,(d/dx),\ \varepsilon_k \text{ racines de l'équation } \varepsilon^3=1).$$

La solution de l'équation homogène, correspondant à (21), est $y=B_1x+B_2x^2+\cdots+B_{3N}x^{3N}$, ($B_k$ constantes d'intégration).

Si l'on y applique la méthode de variation des constantes, on aura la solution générale de l'équation (21), ce qui se fait sans difficulté.

En dehors du cas indiqué, il est difficile de trouver d'autres, pouvant être confrontés avec l'équation (7). C'est encore plus difficile s'il s'agit de l'équation (8).

5. A présent, nous allons considérer un autre type d'équations linéaires, à savoir:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, L_{N_k}[y] = 0, \qquad (N_k \text{ entier non négatif}), \tag{22}$$

où l'on a

$$L_N[y] \equiv x^N y^{(N)} - 1!\binom{N}{1} x^{N-1} y^{(N-1)} + 2!\binom{N}{2} x^{N-2} y^{(N-2)} - \cdots + (-1)^N N! \binom{N}{N} y.$$

L'expression différentielle $L_N[y]$, si l'on y pose $y = xz$, prend la forme très simple que voici

$$L_N[xz] \equiv x^{N+1} z^{(N)}. \tag{23}$$

Grâce à (23), l'équation (22) devient

$$\sum_{k=1}^{n} x^{N_k+1} f_k(x)\, z^{(N_k)} = 0. \tag{24}$$

L'ordre de l'équation (24) est

$$\nu = \max(N_1, N_2, \cdots, N_n).$$

Lorsque

$$\mu = \min(N_1, N_2, \cdots, N_n),$$

l'équation (24), par le changement $z^{(\mu)} = w$, se transforme en une équation linéaire (appelons-la: *équation E*) dont l'ordre est $\nu - \mu$.

L'équation (24) a, comme solutions particulières, les fonctions

$$x,\ x^3, \cdots,\ x^{\mu}.$$

Une équation de telle espèce est par exemple

$$f_1(x)(x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y) + f_2(x)(x^2y'' - 2xy' + 2y) + f_3(x)(xy' - y) = 0. \tag{25}$$

Dans ce cas, l'équation (24) et son équation (E) sont respectivement:

$$x^2 f_1(x) z''' + x f_2(x) z'' + f_3(x) z' = 0,$$

$$x^2 f_1(x) u'' + x f_2(x)\, u' + f_3(x)\, \mu = 0.$$

La dernière équation peut servir comme équation de comparaison en sens employé plus haut.

6. Nous allons indiquer une variante de dernier procédé sur des équations linéaires de troisième et de quatrième ordre.

Envisageons l'équation

$$y''' + f(x)\,(x^2y'' - 2xy' + 2y) + g(x)\,(xy' - y) = 0 \tag{26}$$

qui se transforme, par le changement $y = xz$, en celle

$$xu'' + [x^3 f(x) + 3]\,u' + x^2 g(x)\,u = 0, \qquad (z' = u),$$

équation qui se prête bien à la confrontation envisagée dans cette Note.

L'équation

$$y^{(4)} + f(x)\,(x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y) + g(x)\,(x^2y'' - 2xy' + 2y) + h(x)\,(xy' - y) = 0, \tag{27}$$

à l'aide de changement $y = xz$, reçoit la forme

$$xz^{(4)} + 4z''' + x^4 f(x) z''' + x^3 g(x) z'' + x^2 h(x) z' = 0$$

ou bien

$$xu''' + [x^4 f(x) + 4]\,u'' + x^3 g(x)\,u' + x^2 h(x)\,u = 0 \qquad (z' = u). \tag{28}$$

Étant donné qu'on a de nombreuses équations du type (28), dont les solutions, pour des fonctions $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ convenablement chosies, sont exprimables par des quadıatures et des fonctions spéciales, on pourra construire des équations de la forme (27), intégrables également par fonctions mentionnées.

6. L'équation (2), à l'aide de la substitution

$$y = xt, \qquad t = t(x), \tag{29}$$

se transforme en la suivante

$$x\,u^{(k)} + (k+n)\,u^{(k-1)} - x^{n+1} f(x)\,u = 0, \tag{30}$$

avec $t^{(n)} = u$, $t^{(n)} = d^n t/dx^n$.

On passe de l'équation (5) à (30) par la transformation

$$x^{n+1} t^{(n)} = z, \tag{31}$$

ce qu'on obtient si l'on pose $y = xt$ dans la relation $L[y] = z$, où $L[y]$ est défini par (3).

La correspondance établie entre les équations (5) et (30) permet de vérifier que le coefficient a_r, figurant dans l'équation (5) a, à la verité, la forme suivante

$$a_r = (-1)^r\, r!\, \binom{k-1}{r} \binom{n+r-1}{r}, \quad (r = 1, 2, \cdots, k-1).$$

Le fait indiqué peut être employé pour augmenter le Recueil de *Kamke* d'équations intégrables.

Illustrons ceci sur l'équation de *Perron* {*cf.* [2], p. 502, équation 2.409}

$$x^{2a} u'' + a x^{2a-1} u' + (a-1)^2 u = 0,$$

dont la solution générale est

$$y = C_1 \cos (x^{1-a}) + C_2 \sin (x^{1-a}), \qquad (a>0 \text{ et } a \neq 1),$$

$$(C_1,\ C_2 \text{ constantes d'intégration}).$$

L'équation de *Perron* peut être mise sous la forme

$$xu'' + au' + (a-1)^2 x^{1-2a} u = 0.$$

L'équation (30), pour $k=2$, devient

$$xu'' + (n+2) u' - x^{n+1} f(x) u = 0.$$

Si l'on compare les deux dernières équations, on obtient

$$n+2 = a, \quad f(x) = -(a-1)^2 x^{-2a-n}.$$

On en déduit

$$n = a-2, \; f(x) = -(a-1)^2 x^{-3a+2},$$

où a (>2) désigne un nombre naturel.

Par suite, l'équation (2) de la forme

$$y^{(a)} + (a-1)^2 x^{-3a+2} \sum_{\nu=0}^{a-2} (-1)^\nu \nu! \binom{a-2}{\nu} x^{a-2-\nu} y^{(a-2-\nu)} = 0,$$

avec a (>2) nombre naturel, s'intègre à l'aide des quadratures.

Des exemples de cette nature on peut indiquer dans un grand nombre de cas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. MITRINOVITCH:

Compléments au Traité de Kamke

Note I (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker—Vereinigung*, Bd. 58, 1956, Abt. 2., S. 58—60);

Note II (*Bulletin de la Societé des mathématiciens et physiciens de Serbie*, t. VII, 1955, p. 161—164);

Note III (*Bollettino della Unione matematica italiana*, serie III, anno XI, 1956, pp. 168—171);

Note IV (*Glasnik matematičko-fizički i astronomski*, t. 11, 1956, p. 7—10).

[2] E. KAMKE:

Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. I, 1942, Leipzig.

[3] G. PETIAU:

La théorie des fonctions de Bessel (Monographie éditée par le Centre national de la recherche scientifique, Paris, 1955, 477 pages).

REZIME

DOPUNE KAMKE-OVOM DELU

Nota V

D. S. Mitrinović

Ovo je peti iz serije članaka [1] kojima je cilj upotpunjavanje i uvećavanje *Kamke*-ove zbirke diferencijalnih jednačina.

U ovom članku pokazuje se kako se mogu obrazovati diferencijalne jednačine oblika (1), koje se mogu integraliti pomoću kvadratura i nekih specijalnih funkcija.