UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. Fiz. № 678—№ 715 (1980), 42—44.

685. L'INTRODUCTION DU SYSTÈME DE CHARPIT DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET DE LEUR GÉNÉRALISATIONS À LA THÉORIE DES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES*

Blažo M. Okiljević

Nous considérons une équation différentielle ordinaire du premier ordre

(1) $$y' = X(x,\ y).$$

L'équation correspondante linéaire aux dérivées partielles d'une fonction inconnue $f(x,\ y)$ s'écrit

(2) $$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + X \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

D'après SOPHUS LIE, si l'on a l'identité

(3) $$X\left(z \frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv 0, \qquad z(x,\ y)$$

alor l'expression $\frac{1}{z}$ est un facteur intégrant de l'équation (1).

Nous avons déja généralisé ([1], pp. 1—14) ce théorème pour un système de deux équations différentielles ordinaire du premier ordre:

(4) $$\mathrm{d}y_1 = X_1(x,\ y_1,\ y_2)\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y_2 = X_2(x,\ y_1,\ y_2)\,\mathrm{d}x$$

aux quelles correspond une équation aux dérivées partielles du premier ordre

(5) $$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0, \qquad f(x,\ y_1,\ y_2).$$

Nous avons introduit la notion d'une transformation infinitésimale canonique

(6) $$U(f) \equiv z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}, \qquad z_i(x,\ y_1,\ y_2),$$

* Presented april 1980 by K. ORLOV and Đ. KARAPANDŽIĆ.

qui produit le système CHARPIT de deux équations aux dérivées partielles, à savoir

$$(7)\qquad \begin{aligned} X(z_1)-z_1\frac{\partial X_1}{\partial y_1}-z_2\frac{\partial X_1}{\partial y_2}=0,\\ X(z_2)-z_1\frac{\partial X_2}{\partial y_1}-z_2\frac{\partial X_2}{\partial y_2}=0. \end{aligned}$$

Le système (4) admet le système de deux facteurs intégrants, μ_1 et μ_2, que JACOBI avait défines de la manière suivante

$$(8)\qquad \mu_1(\mathrm{d}y_1-X_1\,\mathrm{d}x)+\mu_2(\mathrm{d}y_2-X_2\,\mathrm{d}x)=\mathrm{d}f(x,\ y_1,\ y_2).$$

D'ici l'on a

$$(9)\qquad \mu_1=\frac{\partial f}{\partial y_1},\quad \mu_2=\frac{\partial f}{\partial y_2},\quad \frac{\partial f}{\partial x}=-\mu_1 X_1=\mu_2 X_2.$$

Ce système définit la fonction $f(x,\ y_1,\ y_2)$ comme une intégrale du système (4), parce qui, en éliminant μ_1 et μ_2 du système (9), on obtient la relation

$$(10)\qquad X(f)\equiv\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial y_2}=0$$

qui est identique à la relation (5).

A présent nous allons considérer un système de n équations différentielles du premier ordre à savoir

$$(11)\qquad \mathrm{d}y_i=X_i(x,\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n)\,\mathrm{d}x\qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

A ce système correspond bien une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(12)\qquad X(f)\equiv\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+\cdots+X_n\frac{\partial f}{\partial y_n}=0.$$

Le système (11) admet le système de n facteurs integrants:

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_n.$$

dépendant des toutes les variables $x,\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$.

Ces n facteurs intégrant μ_i nous allons définir par la relation

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\mu_1(\mathrm{d}y_1-X_1\,\mathrm{d}x)+\mu_2(\mathrm{d}y_2-X_2\,\mathrm{d}x)+\cdots+\mu_n(\mathrm{d}y_n-X_n\,\mathrm{d}x)\\ &\qquad=\mathrm{d}f(x,\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n). \end{aligned}$$

D'ici nous avons les relations suivantes

$$(14)\qquad \mu_1=\frac{\partial f}{\partial y_1},\quad \mu_2=\frac{\partial f}{\partial y_2},\ \ldots,\ \mu_n=\frac{\partial f}{\partial y_n},\quad \frac{\partial f}{\partial x}=-\mu_1 X_1-\mu_2 X_2-\cdots-\mu_n X_n.$$

Analoguement au système (7) nous pouvons écrire le système de n relations de la manière suivante

$$(15) \qquad X(z_k)-\left(z_1\frac{\partial X_k}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial X_k}{\partial y_2}+\cdots+z_n\frac{\partial X_k}{\partial y_n}\right)=0 \qquad (k=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Ces relations, présentant le système de CHAPRIT de n équations aux dérivées partielles, représentent les relations pour définir les coëfficients z_k de la transformation infinitésimale canonique généralisée.

Donc, on voit bien, que les classes des équations différentielles ordinaire du premier ordre, satisfaisant les conditions (7) et (8) ou bien les coditions (11) et (15) peuvent être intégrées à l'aide de ces résultats.

REFERENCES

1. B. M. OKILJEVIĆ: *Sur la thêorie canonique des transformations infinitêsimales.* Ces Publications № 44 (1960), 1—14.

Majke Jevrosime 43
11000 Beograd, Jugoslavie

UVOĐENJE CHARPITEVNG SISTEMA PARCIJALNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA I NJIHOVIH GENERALISANJA U TEORIJU INFINITEZIMALNIH TRANSFORMACIJA

B. Okiljević

Dobija se sistem od n Charpit-ievih parcijalnih diferencijalnih jednačina (15).

Ovaj sistem određuje veze između koeficijenata z_k generalisanih kanoničnih infinitezimalnih transformacija.